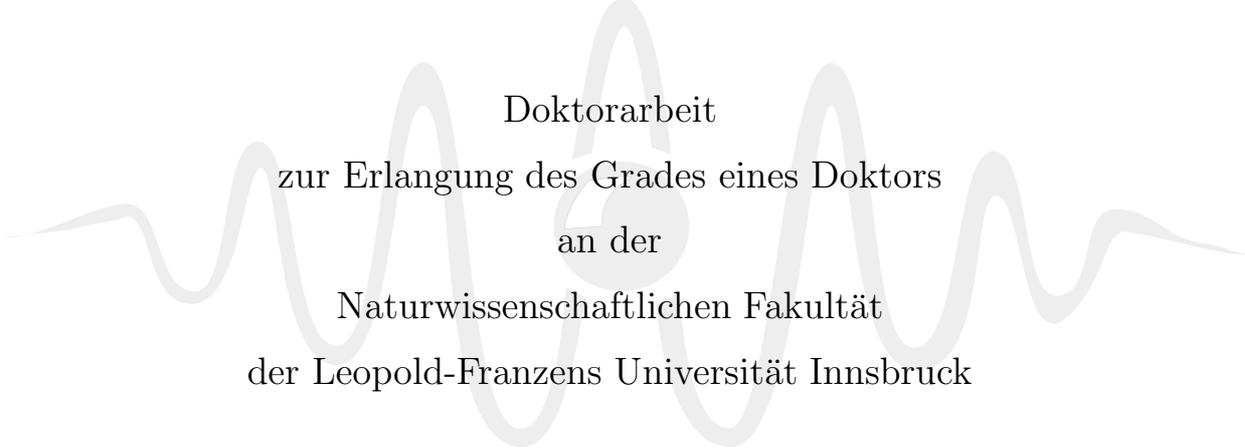


Zwei Experimente zur Interferenz von Zwei-Photonen Zuständen

Ein Heisenbergmikroskop und Pendellösung



Doktorarbeit
zur Erlangung des Grades eines Doktors
an der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Leopold-Franzens Universität Innsbruck

eingereicht von
Mag. rer. nat. Birgit Dopfer
im Dezember 1998

durchgeführt am Institut für Experimentalphysik
unter der Leitung von
o. Univ. - Prof. Dr. Anton Zeilinger

Diese Arbeit wurde vom Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung im
Rahmen des Schwerpunktes "Quantenoptik", Projekt S06502, unterstützt.



"BUT, HEISENBERG — YOU MUST BE CERTAIN ABOUT SOMETHING!"

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Geschichtlicher Abriß	1
1.2. Eine kurze Vorschau auf die vorliegende Arbeit	6
2. Unsere Quelle korrelierter Photonen: die Parametrische Fluoreszenz	9
2.1. Allgemeines	9
2.2. Spezielle Eigenschaften der korrelierten Photonen	10
2.2.1. Bedingungen für die Phasenanpassung	10
2.2.2. Zeitkorrelation, Phase und Kohärenz des Zwei-Photonen Zustands	12
2.2.3. Ein verschränkter quantenmechanischer Zustand	14
2.3. Photographie der Type-1 Parametrischen Fluoreszenz	14
3. Einige grundlegende Konzepte der Quantenmechanik	17
3.1. Interferenz und Welle-Teilchen Dualismus	17
3.1.1. Die Feynman Regeln für Interferenz	17
3.1.2. Ein Interferenzexperiment mit Elektronen	18
3.2. Die Kopenhagener Interpretation der Quantenphysik	20
3.2.1. Verschränkung	20
3.2.2. Meßprozeß und Komplementarität	21
4. Ein Heisenbergmikroskop für Korrelierte Photonen	25
4.1. Die Ideen hinter unserem Experiment	25
4.1.1. Die Unschärferelationen	25
4.1.2. Ein Mikroskop zur Messung von Ort und/oder (?) Impuls eines Elektrons - die ursprüngl.	
4.1.3. Die Ideen von Popper	28
4.1.4. Ein erstes Schema auf dem Weg zur Realisation	30
4.2. Die Realisation des Experimentes im Labor	31

4.2.1.	Einige zusätzliche Voraussetzungen kurz erklärt	32
4.2.2.	Meßaufbau und Justierung	33
4.2.3.	Das Klyshko Bild - ein schneller Weg zu einem intuitiven Verständnis	35
4.2.4.	Unsere Komponenten	40
4.2.5.	Die im Experiment gewählten Distanzen	44
4.2.6.	Abbildungsunschärfen	47
4.2.7.	Photographie des Meßaufbaus	50
4.3.	Die experimentellen Ergebnisse	51
4.3.1.	Heisenbergs Mikroskop: Überprüfen der Messung durch eine Testmessung	53
4.3.2.	Nichtlokale Interferenz- und Abbildungsmuster	62
4.4.	Theoretische Überlegungen	75
4.4.1.	Berechnung der Felder nach dem Klyshko-Bild	75
4.4.2.	Berechnung von Kontrast und Weginformation	81
4.5.	Gegenüberstellung von Weginformation vs. Interferenzkontrast	83
4.6.	Ein Experiment mit verzögerter Entscheidung	88
4.6.1.	Ein Heisenbergmikroskop mit verzögerter Entscheidung für Orts- oder Impulsmessung	91
5.	Zwei-Photonen Interferenz bei Dynamischer Beugung	97
5.0.2.	Allgemeines zur Dynamischen Beugungstheorie	97
5.1.	Dynamische Beugung von Licht an akustischen Wellen	98
5.1.1.	Ausgangspunkte der Theorie	98
5.1.2.	Ein "Schnellsiedekurs" in Phänomenen der dynamischen Beugungstheorie: Anregungsfeld	103
5.1.3.	Reflektivität / Transmittivität des akusto-optischen Modulators	107
5.2.	Detektionswahrscheinlichkeiten: Einzelzählraten und Koinzidenzen	110
5.2.1.	Die Einzelzählraten für unsere parametrischen Fluoreszenz Photonen	110
5.2.2.	Koinzidenzzählraten für die korrelierten Photonenpaare	111
5.3.	Eine realistischere Beschreibung der Photonenpaare	112
5.3.1.	Antikoinzidenz am Strahlteiler	112
5.3.2.	(Un)- Unterscheidbarkeit der Photonen eines Paares	114
5.4.	Aufbau des Experimentes	118
5.4.1.	Die verwendeten Komponenten	119
5.5.	Die experimentellen Daten	122
5.5.1.	Daten, gemessen mit einem HeNe-Laser	122

5.5.2. Die gemessenen Daten für unsere korrelierten Photonen	124
6. Zusammenfassung	129
Abbildungsverzeichnis	133
A. Unser Kristall: LiIO_3	135
B. Die Rechnungen zur Parametrischen Fluoreszenz	136
C. Berechnungen zum Heisenbergmikroskop	139
C.1. Berechnung der relevanten Distanzen und Phasen	139
C.2. Die möglichen Winkel im Experiment	140
D. Rechnungen zum AOM-Experiment	142
D.1. Berechnung der Reflektivität des AOM mittels ebener Wellen	142
Danksagung	144
Lebenslauf	146

1. Einleitung

1.1. Geschichtlicher Abriß

Die Errungenschaften des 19. Jahrhunderts

Der Beginn des 20. Jahrhunderts mit der Formulierung zweier so revolutionärer Theorien wie der Relativitätstheorie einerseits und der Quantentheorie andererseits kann sicher als Meilenstein in der modernen Physik gesehen werden.

Bis dato war das physikalische Denken beherrscht durch die Newton'sche Mechanik: alle bis dahin beobachteten Phänomene folgten ihren kausalen Bewegungsgesetzen, waren exakt vorhersagbar, unabhängig vom Beobachter; Raum und Zeit galten als absolute Größen. Die Theorie wurde als feste und endgültige Grundlage der Physik allgemein akzeptiert.

Allein in der Optik gab es Probleme, die schon bekannten Interferenzeffekte mit Newton's Korpuskulartheorie in Einklang zu bringen. Wesentliche Fortschritte erzielte hier Thomas Young, der in den Jahren 1801-1803 auf dem Fundament Huygens eine Wellentheorie entwickelte und den nach ihm benannten Doppelspaltversuch durchführte. Mit seiner Beschreibung des Interferenzphänomens konnte er einige Experimente Newtons richtig erklären. Ähnliche Ansichten vertrat auch Fresnel. Ansonsten stieß die Wellentheorie allerdings auf allgemeinen und erbitterten Widerstand, in England wurde sogar von einem Frevel gegen die wahre Newton'sche Lehre gesprochen.

Den Durchbruch der Darstellung des Lichtes als Welle brachten erst die von Maxwell 1862 formulierten elektromagnetischen Gleichungen. Er erkannte, daß elektromagnetische Wellen den Lichtwellen gleichzusetzen sind, Elektromagnetismus und Optik verbanden sich zu einer Theorie (*"...Geschwindigkeit v , die die Zahl der elektrostatischen Elektrizitätseinheiten angibt...stimmt so gut mit der Lichtgeschwindigkeit überein, daß wir anscheinend allen Grund zur Annahme haben, das Licht - sowie die Wärmestrahlung, aber auch andere Strahlungen, wenn es solche gibt - sei eine elektromagnetische Störung.."*¹).

Um die Fortpflanzung der elektromagnetischen Wellen beschreiben zu können erschien es nur natürlich, weiterhin an der klassischen Mechanik als gesicherter Basis festzuhalten, zu sehr war dieses Denken in den Köpfen der Physiker verwurzelt.

Die Einführung eines hypothetischen Trägermediums war vonnöten, um die Ausbreitung der Wellen mit mechanischen Konzepten verstehen zu können: dies sollte ein alles durchdringender Stoff sein, der sogenannte "Äther", in dem sich Licht durch elektrische Verschiebungen und magnetische Wirbel der Ätherteilchen ausbreiten kann - analog zur Fortpflanzung von Schall in Luft (schon Fresnel hatte diese Vorstellung: *"la lumiere n'est qu'un certain mode*

¹J.C. Maxwell, *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, Phil. Trans. 155, 459 (1859)

de vibration d'un fluide universel"²).

Die Geschwindigkeit des Lichtes wäre damit abhängig vom Bezugssystem. Dies nachzuweisen war das Ziel von Experimenten, durchgeführt 1887 von Michelson und Morley. Mittels eines Interferometers sollte der durch die verschiedenen Lichtgeschwindigkeiten hervorgerufene Phasenschub, bedingt durch die zwei verschiedenen Laufrichtungen im Interferometer, gemessen werden. Trotz genügender Empfindlichkeit des Meßinstrumentes konnte kein solcher Phasenschub festgestellt werden; die Geschwindigkeit des Lichtes blieb dieselbe, unabhängig von der Meßrichtung.

Es war dann Einstein, der die weitreichenden Konsequenzen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit erkannte und die so lange als unantastbar gegoltenen Dogmen von absoluter Zeit und absolutem Raum zum Einsturz brachte. 1905 veröffentlichte er die Spezielle Relativitätstheorie, acht Jahre später die noch weiterreichende Allgemeine Relativitätstheorie.

Doch nicht nur die traditionellen Denkweisen in Bezug auf die Raum-Zeit sollten fallen, zur selben Zeit führte ein kleiner mathematischer Trick Plancks dazu, daß die letzten Bollwerke der klassischen Physik schließlich einstürzten. Es war der Beginn einer neuen, alles umwälzenden Theorie, die in noch nie dagewesener Weise die Gemüter von Physikern und Philosophen gleichermaßen erhitze. Bis heute sind Fragen offen geblieben, bis heute gibt es Kritiker, die eine Theorie hinter der Theorie suchen um die merkwürdigen und faszinierenden Phänomene, die direkt aus der Quantenmechanik folgen und mit unseren, dem alltäglichen Leben entsprungenen Denkweisen völlig inkompatibel sind, zu vermeiden bzw. auf dem Boden der Klassik erklären zu können.

Die Geburt der Quantenmechanik

Aus heutiger Sicht gab die Natur schon vor Plancks Entdeckung Hinweise auf die begrenzte Gültigkeit der klassischen Theorien, wie z.B. die Linienspektren der Atome oder die Radioaktivität.

Um die Jahrhundertwende war das Problem aufgetaucht, die Strahlung eines schwarzen Körpers zu beschreiben. Zwei Theorien existierten bereits, das Wien'sche Verschiebungsgesetz, das nur im Bereich hoher Frequenzen richtige Ergebnisse liefert, und das Rayleigh-Jeans Gesetz, das wiederum nur im Bereich niedriger Frequenzen gültig ist. Es war nicht gelungen eine einheitliche Beschreibung für den gesamten Frequenzbereich zu formulieren.

Erst Planck gelang dies mittels einer auf den ersten Blick etwas willkürlich erscheinenden, aber zum richtigen Ergebnis führenden Annahme. Die Hohlraumwandung sollte aus Oszillatoren mit einer bestimmten Eigenfrequenz aufgebaut sein, die nur ganzzahlige Vielfache eines Energieelementes endlicher Größe aufnehmen können: der Begriff des Energiequants war geboren!

Planck erkannte zwar als erster den direkten Zusammenhang zwischen der Frequenz und der Energie des Strahlungsfeldes, er nahm jedoch weiterhin an, daß die Quantelung eine Folge der materiellen Körper sei und keine Eigenschaft des Lichtes selbst.

Einstein war es, der, indem er Plancks Ideen logisch konsequent weiterentwickelte, die Bedeutung des Quantenbegriffes über die Strahlungsformel hinaus erkannte. 1905 prägte er den Begriff des Lichtquants ("Photon") und erklärte damit den photoelektrischen Effekt ("*...sondern es [das Strahlungsfeld] besteht aus einer endlichen Anzahl von in Raumpunkten*

²K. Simonyi, *Kulturgeschichte der Physik*, Verlag Harri Deutsch, p. 350

lokalisierten Energiequanten, welche sich bewegen ohne sich zu teilen und nur als Ganzes absorbiert und erzeugt werden können.“³). In erster Linie für diese Arbeit erhielt Einstein 1921 den Nobelpreis.

Mithilfe des neuen Prinzips der Quantelung (Quantenhypothese) gelang es nun eine ganze Reihe von Phänomenen zu verstehen, was schließlich in der endgültigen Ausformulierung der Quantenmechanik, wie wir sie heute kennen, gipfelte.

1913 stellte Niels Bohr ein Atommodell auf, mit dessen Hilfe die diskreten Linienspektren erstmals erklärt werden konnten. Die zugrundeliegenden Postulate Bohr's - wie z.B. daß das Elektron, wenn es sich auf einer stationären Bahn um den Kern bewegt, entgegen den Gesetzen der Elektrodynamik keine Energie abstrahlt - stießen unter Physikern jedoch nicht nur auf Freunde, von Laue schrieb dazu: *„Das ist Unsinn, die Maxwellschen Gleichungen gelten unter allen Umständen, ein Elektron auf Kreisbahn muß strahlen!“*⁴. Auch Bohr selbst war sich der Mängel in seiner Theorie wohl bewußt.

Beruhend auf Bohr's These konnte Einstein allerdings 1917 Plancks Strahlungsformel ableiten und die Prozesse der Absorption und sowohl der induzierten als auch spontanen Emission beschreiben; der von vielen Physikern - allen voran Einstein - so ungeliebte Zufall bei einem einzelnen Ereignis hielt Einzug in die physikalischen Theorien: der Zeitpunkt für die spontane Emission des einzelnen Photons folgt einer statistischen Verteilung, nur für die durchschnittliche Lebensdauer des angeregten Atomniveaus kann ein bestimmter Wert angegeben werden.

Zusätzlich tauchte noch ein weiteres Problem auf: das durch Einsteins Einführung des Photons schon erzeugte Dilemma der Beschreibung von Licht einerseits als Welle - zur Erklärung von Interferenzeffekten - und andererseits als Teilchen - um den Photoeffekt oder den Comptoneffekt verstehen zu können - wurde von de Broglie noch ausgebaut. 1924 beschrieb er in seiner Doktorarbeit den Zusammenhang zwischen Impuls und Wellenlänge und postulierte das Welleverhalten von bis dahin definitiv als Teilchen gegoltenen Objekten (wie z.B. dem Elektron). Allerdings, unabhängig davon hatten Davisson und Germer diesen Effekt schon experimentell gesehen: bei Untersuchung eines Kristalles mittels Elektronen konnten sie zu diesem Zeitpunkt noch unerklärliche Interferenzen beobachten. Es war die experimentelle Bestätigung der Existenz von *„Materiewellen“*.

Die Zusammenfassung des Sammelsuriums von teils scheinbar widersprüchlichsten Erkenntnissen zu einer einheitlichen mathematischen Theorie ist in erster Linie zwei Männern, Heisenberg und Schrödinger, zu verdanken. Ausgehend von verschiedenen Grundgedanken und mittels zweier verschiedener Formalismen - die dennoch beide dasselbe Ergebnis liefern - entwickelten sie um 1925 die quantenmechanischen Grundgleichungen.

Heisenbergs gedanklicher Ausgangspunkt war Bohrs Atommodell. Er glaubte hier einen grundlegenden Fehler darin erkannt zu haben, die diskreten Frequenzen durch Übergänge zwischen wohldefinierten - durch die klassische Mechanik beschreibbaren - Bahnen, auf denen die Elektronen mit bestimmten Geschwindigkeiten kreisen, beschreiben zu wollen.

Heisenberg versuchte seine Gleichungen so zu konstruieren, daß in ihnen alleine meßbare, beobachtbare Größen vorkommen, die durch Matrizen dargestellt werden.

Zur endgültigen mathematischen Formulierung der Matrizenmechanik leisteten neben Heisenberg selbst vor allem Born und Jordan wesentliche Beiträge.

³A. Einstein, zitiert in K. Simonyi, *Kulturgeschichte der Physik*

⁴von Laue, zitiert in K. Simonyi, *Kulturgeschichte der Physik*, p. 437

Von einem völlig anderen Grundgedanken aus gelangte - etwa zur gleichen Zeit wie Heisenberg - Erwin Schrödinger zu einer Grundgleichung etwas anderer Art, der nach ihm benannten Wellengleichung. Beruhend auf dem Problem des Welle-Teilchen Dualismus für Licht und de Broglies These von einer Dualität auch für Materieteilchen nahm er an, daß die Grundgleichungen der Mechanik als Grenzfall einer neuen Mechanik, der "Wellenmechanik", zu verstehen sein müßten (analog zur Strahlenoptik als Grenzfall der Wellenoptik für kleine Wellenlängen). Mithilfe dieser Wellengleichung läßt sich das Problem der Quantisierung auf ein Eigenwertproblem reduzieren.

Auf den ersten Blick verschieden, gehen die beiden Formalismen doch auseinander hervor und sind mathematisch äquivalent. Hilbert hatte - schon vor Veröffentlichung von Schrödingers Wellengleichung - versucht, Born und Heisenberg auf die zwingende Existenz einer Differentialgleichung hinzuweisen: "...Hilbert, den sie [Born, Heisenberg] ersuchten, ihnen behilflich zu sein, sagte... um weiterzukommen sollten sie sich die Differentialgleichung ansehen, aus denen sich ihre Matrizen ergeben hätten. Die Physiker hielten das für eine Ungereimtheit... und so hatte Hilbert viel Spaß daran ihnen später vorzuhalten, sie hätten die Schrödinger'sche Wellenmechanik sechs Monate früher entdecken können, wenn sie seinen Worten mehr Aufmerksamkeit geschenkt hätten." ⁵

Das mathematische Rüstzeug war zwar vorhanden, das Problem der Interpretation der neuen Theorie, wie z.B. die physikalische Deutung von Schrödingers Ψ -Funktion, war jedoch ungelöst.

Anfangs bestand für viele Physiker noch die schwache Hoffnung, die Quantenphysik doch in den Rahmen der klassischen Physik eingliedern zu können: die Wellengleichung ist deterministisch, Gleichungen dieser Art sind in der klassischen Wellenoptik wohlbekannt. So war Schrödinger überzeugt von einem direkten Zusammenhang zwischen seiner Wellenfunktion und dem zu beschreibenden Teilchen und von einer Rückkehr zum Determinismus.

Diese letzte Hoffnung wurde durch Borns grundsätzlich statistische Interpretation der Ψ -Funktion endgültig begraben; gleichzeitig gab er damit das Zeichen zum Auftakt einer leidenschaftlichen Debatte über Kausalität und Akausalität, Determinismus und Indeterminismus und die Gültigkeit der Quantenmechanik selbst, die bis zum heutigen Tag nicht ganz aufgehört hat.

Die Kopenhagener Deutung gegen Determinismus und Kausalität

Die Interpretation der Quantentheorie, wie sie ab ca. 1926 in Kopenhagen entstand, verbindet sich in erster Linie mit dem Namen Niels Bohr und der Bohrschen Schule, der v. a. die junge Garde der Physiker, wie Heisenberg, Pauli, Dirac, Ehrenfest u.a. angehörten.

Kausalität und Determinismus wurden verbannt, an ihre Stelle traten die Unvorhersagbarkeit eines einzelnen Quantenereignisses und der von Bohr geprägte Begriff der "Komplementarität".

Aufgrund der Unberechenbarkeit des Elementarprozesses kann über das Resultat einer Messung an einem einzelnen Objekt nur eine Wahrscheinlichkeitsaussage getroffen werden, deren Verteilung bestimmt wird durch Schrödingers Ψ -Funktion. Der Wert einer Variablen ist vor der Messung prinzipiell unbestimmt; es können keine Rückschlüsse gezogen werden. Die Frage nach dem "Was war davor [vor der Messung]?" hat in dieser Interpretation der

⁵E.U. Condon, *60 years of Quantum Physics*, Physics Today 15, 37-49 (1962)

Quantenmechanik keinen Platz, ist sinnlos.

Der Begriff der Komplementarität wurde von Bohr an verschiedenen Stellen zur Interpretation gebraucht; er ist eng mit Heisenbergs Unschärferelation verknüpft. Beide spiegeln die prinzipielle Unmöglichkeit der gleichzeitigen scharfen Messung zweier zueinander konjugierter Variablen wieder, wie z.B. Ort und Impuls eines Teilchens, oder auch Energie und Zeit, Weginformation und Interferenz. Das Prinzip der Komplementarität bezieht sich aber auch ebenso auf den Meßaufbau: nur im Zusammenhang mit der zur Messung gehörenden Apparatur ist es sinnvoll, von den Eigenschaften eines Quantenobjektes zu sprechen.

Es ist nicht weiter verwunderlich, daß die revolutionären und gleichzeitig sehr scharfen Formulierungen der Kopenhagener (*"Die Quantenmechanik ist grundsätzlich eine statistische Theorie und als solche eine abgeschlossene Theorie, die keine Modifikationen ihrer physikalischen und mathematischen Grundannahmen zuläßt"*⁶) auf erbitterten Widerstand bei konservativen Physikern stießen, allen voran Einstein und Schrödinger. Bemerkenswerterweise gerade diese beiden Physiker, die ohne Zweifel einige der wichtigsten und wegweisenden Beiträge zur Entwicklung der nun von ihnen verdammtten Theorie leisteten (*"Wenn es doch bei dieser verdammtten Quantenspringerei bleiben soll, so bedaure ich, mich überhaupt jemals mit der Quantentheorie abgegeben zu haben!"*⁷ *"...die Quantenmechanik ist sehr achtungsgebietend. Aber eine innere Stimme sagt mir, daß das noch nicht der wahre Jakob ist. Die Theorie liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten bringt sie uns kaum näher. Jedenfalls bin ich überzeugt, daß der liebe Gott nicht würfelt!"*⁸).

Die Skepsis und Ablehnung resultierte in einem Zusammenstoß von Titanen ähnlichen, aber äußerst fruchtbaren Diskussionen Bohrs einerseits mit Schrödinger, als dieser zu Gast in Kopenhagen war, andererseits mit Einstein 1927 anlässlich des Solvay Kongreßes in Brüssel. Die Gedankenexperimente, die Einstein konstruierte um die Quantenmechanik zu Fall zu bringen, und Bohrs allmorgendliche Lösung des vermeintlichen Paradoxons zugunsten der Quantentheorie, zählen sicher zu den berühmtesten Debatten in der Physikgeschichte.

Mit immer neuen Beispielen versuchte Einstein nachzuweisen, daß die Beschreibung, die die Schrödingersche Wellenfunktion von einem quantenmechanischen System liefert, nicht vollständig ist, daß es also in einem geschickt konstruierten Aufbau sehr wohl möglich ist gleichzeitig die zwei zueinander konjugierten Variablen zu messen.

Trotz immer gewitzterer Experimente gelang es Bohr jedoch immer, den logischen Fehler in Einsteins Überlegungen zu finden und die Gültigkeit der quantenmechanischen Aussagen hervorstreichend⁹.

Neben der Kopenhagener Deutung entstanden auch andere Interpretationsversuche, wie die "many world" Theorie¹⁰ oder verschiedene Typen von "hidden variables" Theorien^{11,12}.

⁶zitiert in K. Simonyi, *Kulturgeschichte der Physik*, p. 455

⁷W. Heisenberg, *Der Teil und das Ganze. Gespräche im Umkreis der Atomphysik*, Verlag R. Piper & Co (1969)

⁸M. Born, *Physik im Wandel der Zeit*, Vieweg (1966)

⁹M. Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics*, J. Wiley & Sons, NY (1974)

¹⁰H. Everett III, *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, ed. B. Dewitt, N. Graham, Princeton Univ. Press (1973)

¹¹J.S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics: Collected Papers in Quantum Mechanics*, Cambridge Univ. Press (1993); beinhaltet unter anderen:

On the Einstein - Podolsky - Rosen Paradox, *Physics* 1, 195 (1964)

On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics, *Rev.Mod.Phys.* 38, 447 (1966)

¹²B. d'Espagnat, *The Quantum Theory and Reality*, *Scien.Am.* 11, 128 (1979)

In letzteren sollen versteckte Parameter die Informationen, die man aus der Ψ -Funktion über ein quantenmechanisches System gewinnen kann, vervollständigen. Die Interpretation der Bohrschen Schule ist heute allerdings doch von den meisten Physikern als die Richtige anerkannt.

Ab etwa 1970 ist es möglich geworden - v.a. mittels der direkt aus der Quantenmechanik resultierenden Eigenschaft der Verschränkung¹³ - die Theorie auf aufschlußreiche Experimente zu stützen.

Als Quellen der verschränkten Teilchen können Kaskadenprozesse in Atomen oder e^-e^+ Vernichtung u.a. herangezogen werden. Mit der Entdeckung der Parametrischen Fluoreszenz (oder 'parametric down conversion'; der Prozeß liefert verschränkte Photonenpaare) entstand ab etwa 1980 ein richtiger Boom von Experimenten und neuen Erkenntnissen.

Dazu gehören u.a. Experimente^{14,15} zu den von Bell 1964 als Antwort auf das EPR-paper¹⁶ aufgestellten Ungleichungen¹⁷, womit ein Formalismus zur Verfügung steht, mit dem die Gültigkeit der Quantenmechanik getestet werden kann. Für drei verschränkte Teilchen¹⁸ können sogar direkt ohne Ungleichung die Annahmen von EPR zu einem Widerspruch geführt werden.

In letzter Zeit zusätzlich in den Brennpunkt des Interesses gerückt sind Experimente zu Ideen der Quantenkryptographie, Quantencomputer oder Teleportation.

Die Zeit der Entdeckungen ist noch lange nicht vorbei und man darf gespannt sein, was die Zukunft an neuen Erkenntnissen bringen wird.

1.2. Eine kurze Vorschau auf die vorliegende Arbeit

Mit der Erfindung des Lasers und dann ab Beginn der 80er Jahre mit der Verwendung der parametrischen Fluoreszenz (einem in einem nichtlinearen Kristall durch einen UV-Laser induzierten Prozeß) erfuhr die Physik der Quantenoptik einen gewaltigen Aufschwung.

Die korrelierten Photonenpaare, die in diesem Prozess erzeugt werden, zeichnen sich durch eine - gegenüber anderen Prozessen - hohe Intensität und wohldefinierte Richtungen, abhängig von Impuls und Farbe, aus. Aufgrund dieser Eigenschaften stellen sie eine ideale Realisierung von zwei verschränkten Teilchen dar und eine Vielzahl von bis dato Gedankenexperimenten konnten so durchgeführt werden.

Die in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Experimente wurden ausschließlich mithilfe der verschränkten Photonenpaare durchgeführt. Es ist deshalb essentiell, die Funktionsweise des Prozesses und die speziellen Eigenschaften der so erzeugten Teilchen besser zu verstehen. Eine genaue Beschreibung findet man in Kapitel 2 vorliegen.

¹³nach einer Wechselwirkung müssen die Teilchen, auch wenn sie räumlich und zeitlich getrennt sind, durch eine gemeinsame, nicht faktorisierbare Wellenfunktion beschrieben werden, was gleichbedeutend ist mit Korrelationen in Impuls oder Spin, u.a.

¹⁴A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, *Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time Varying Analyzers*, Phys. Rev. Lett. 49, 1804 (1982)

¹⁵G. Weihs, Th. Jennewein, Ch. Simon, H. Weinfurter, A. Zeilinger, *Violation of Bell's Inequality under strict Einstein Locality Conditions*, Phys. Rev. Lett. 81, 5039 (1998)

¹⁶A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be considered complete?*, Phys. Rev. 47, 777 (1935)

¹⁷J.S. Bell, *On the Einstein - Podolsky - Rosen Paradox*, Physics 1, 195 (1964)

¹⁸D.M. Greenberger, M.A. Horne, A. Simony, A. Zeilinger, *Bell's Theorem without Inequalities*, Am. J. Phys. 58, 1131 (1990)

Im darauffolgenden Kapitel wird auf einige grundlegende Konzepte der Quantenmechanik näher eingegangen, dies sind u.a. das Phänomen der Interferenz und der damit verbundene Welle-Teilchen Dualismus, das von Niels Bohr eingeführte Komplementaritätsprinzip und Heisenbergs Unschärferelationen. Einen Weg zu einem besseren Verständnis dieser Konzepte findet man in Gedankenexperimenten, wie Feynman's Doppelspaltexperiment mit Elektronen oder Heisenberg's Mikroskop.

Letzteres befindet sich allerdings nicht mehr im Stadium einer rein gedanklichen, nur theoretisch analysierbaren Idee zur Veranschaulichung der Unbestimmtheitsrelationen, sondern wurde von uns erstmals experimentell realisiert. Kapitel 4 beschreibt den modifizierten Aufbau, bei dem die zwei korrelierten Photonen eines Paares die Rolle der ursprünglich von Heisenberg vorgeschlagenen Teilchen übernehmen. Es ist sicher keine Überraschung, daß die experimentellen Daten die Unmöglichkeit der gleichzeitigen scharfen Messung von Ort (oder Weginformation) und Impuls (oder Interferenz) bestätigen.

Mit der Gegenüberstellung des Kontrastes der Interferenzbilder mit der Weginformation in Kapitel 4.5 erhält man einen genaueren Einblick in die behandelten Phänomene.

Auch bei einer verzögerten Entscheidung ("delayed-choice" Experiment) zwischen Orts- und Impulsmessung erhält man wieder zu Kapitel 4 analoge Ergebnisse, die minimale Unschärfe zwischen Ortsinformation und Impulsinformation bleibt in jedem Fall erhalten, die Quantentheorie kann nicht überlistet werden.

Das letzte Kapitel ist einem zweiten Experiment gewidmet, der Untersuchung von Interferenzeffekten bei der dynamischen Beugung von korrelierten Photonen. Nach einer Einführung in die dynamische Beugungstheorie (wie sie in der Literatur vor allem im Zusammenhang mit der Beugung von Neutronen oder Röntgenstrahlen zu finden ist), liefert Kapitel 5 eine Beschreibung der Durchführung des Experimentes, theoretische Berechnungen und die gemessenen Daten. Erstmals konnte die "Pendellösungslänge"¹⁹ für einen Zwei-Photonen Zustand aufgezeichnet und mit jener für Einzelphotonen verglichen werden.

Eine kurze Zusammenfassung in Kapitel 6 und ein Appendix, in dem man sowohl längere Berechnungen als auch nähere Informationen zu dem verwendeten Kristall oder dem akusto-optischen Modulator finden kann, beenden diese Arbeit.

¹⁹diese Länge ist ein typischer Parameter für dynamische Beugungseffekte

2. Unsere Quelle korrelierter Photonen: die Parametrische Fluoreszenz

Zur Produktion von korrelierten Teilchen können verschiedene Prozesse herangezogen werden, wie z.B. Protonenstreuung an einem Wasserstofftarget, $e^- - e^+$ Vernichtung oder Kaskadenübergänge in Atomen.

In letzterem Fall entstehen zwei verschränkte Photonen beim Zerfall eines angeregten Atomzustands über einen kurzlebigen Zwischenzustand. Der Prozeß hat den großen Nachteil, daß die Photonen über den gesamten Raumwinkel erzeugt werden und nur ein Bruchteil im Experiment verwendet werden kann.

Die optimalste heute im Labor verfügbare Quelle von Photonenpaaren wird realisiert über den Prozeß der Parametrischen Fluoreszenz¹: es gelten Impuls- und Energieerhaltung; im Gegensatz zu Kaskadenübergängen in Atomen sind die Richtungen der zwei Photonen aufgrund der großen Masse des Kristalles wohldefiniert. Wir haben hohe Zählraten (verglichen mit anderen Erzeugungsprozessen) und hohe Korrelationen der Teilchen.

Aufgrund der enormen Leistungsfähigkeit der Parametrischen Fluoreszenz wird sie heute in den meisten quantenoptischen Experimenten mit Photonen fast ausschließlich eingesetzt.

Man unterscheidet zwischen zwei Typen, der sogenannten Type-1 und der Type-2 Konversion. Letztere beinhaltet zusätzlich eine Polarisationsverschränkung der Photonenpaare. Bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimenten reichte jedoch die Impulsverschränkung der Type-1 parametrischen Fluoreszenz völlig aus; wir werden uns im folgenden auf diesen Typ beschränken.

2.1. Allgemeines

Mittels eines UV-Lasers wird in einem nichtlinearen Medium ohne Inversionssymmetrie, wie BBO oder LiIO_3 , der Prozeß der parametrischen Fluoreszenz induziert.

Das Pumpphoton zerfällt spontan, unter Erhaltung von Energie und Impuls, mit einer Effizienz von ca. 10^{-4} in zwei niederfrequenteren Photonen, die ein hochkorreliertes Photonenpaar bilden. Historisch begründet werden die beiden Photonen Signal und Idler genannt.

Der verschränkte Zwei-Photonen Zustand ist nicht mehr durch Maxwells Elektrodynamik beschreibbar, die Korrelationen in Emissionsrichtung und -zeit der zwei korrelierten Photonen können durch keine rein klassische Theorie erklärt werden. Zu ihrer Beschreibung muß der quantenmechanische Formalismus herangezogen werden².

¹W.H. Louisell, A. Yariv, A.E. Siegman, Phys. Rev. 124, 1646 (1961)

²C.K. Hong, L. Mandel, *Theory of Parametric Frequency Downconversion of Light*, Phys. Rev. A 31, 2409 (1985)

Eine genaue Herleitung des Zwei-Photonen Zustands über den Hamilton Formalismus findet man in Appendix B.

Ausgangspunkt bildet das Laserfeld, das eine Änderung in der Polarisierbarkeit und der elektrischen Suszeptibilität des Kristalles verursacht.

Aufgrund der hohen Intensität des Lasers kann das Pumplicht als klassische elektromagnetische Welle beschrieben werden. Im Gegensatz dazu müssen die aus der dielektrischen Verschiebung resultierenden Felder, die die korrelierten Photonen beschreiben, quantisiert werden.

Die Kopplung des Pumpfeldes an die Photonenpaare innerhalb der Wechselwirkungsregion beschreiben wir mit einem Hamilton Operator $\hat{\mathbf{H}}$, der die Gesamtenergie des Systems einschließlich der Wechselwirkungsenergie wiedergibt. Aufgrund der geringen Effizienz des Prozesses ist er gleich der Summe zweier Operatoren, $\hat{\mathbf{H}}_0$ (beschreibt die Energie jener Photonen des Laserfeldes, die den Kristall ohne Effekt passieren) und $\hat{\mathbf{H}}_I$ (Wechselwirkungsoperator). Nach Integration über das Wechselwirkungsvolumen³, definiert durch die Kristalllänge l_1 und den Querschnitt des Pumplasers l_2, l_3 , und die Wechselwirkungszeit t , erhalten wir die Zustandsfunktion

$$|\Psi(t)\rangle \approx \text{sinc}\left[\frac{1}{2} \cdot (\omega_0 - \omega' - \omega'') \cdot t\right] \cdot \prod_{n=1}^3 \left(\frac{\sin\left[\frac{1}{2} \cdot (k_0 - k' - k'')_n \cdot l_n\right]}{\frac{1}{2} \cdot (k_0 - k' - k'')_n \cdot l_n} \right) \cdot |\mathbf{k}'\rangle |\mathbf{k}''\rangle \quad (2.1)$$

mit ω_0 gleich der Pumpfrequenz und ω', ω'' den Frequenzen der erzeugten Photonen eines Paares; analoges gilt für die Wellenvektoren \mathbf{k} .

Von dieser Funktion ausgehend können wir die speziellen Eigenschaften der korrelierten Photonenpaare genauer analysieren.

2.2. Spezielle Eigenschaften der korrelierten Photonen

2.2.1. Bedingungen für die Phasenanpassung

Die sinc-Funktionen aus Gl. (2.1) definieren aufgrund ihrer Eigenschaften die Bedingungen für Wellenvektoren und Frequenzen.

Für maximale Intensität, $\text{sinc}\left[\frac{1}{2} \cdot (k_0 - k' - k'')_n \cdot l_n\right] = 1$, dürfen die drei involvierten Wellenvektoren nur ganz bestimmte Werte annehmen; man erhält eine Bedingung für Phasenanpassung ("phase matching"). Analog ergibt sich auch für die Frequenzen eine einschränkende Bedingung für die erlaubten Werte.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_0 &\approx \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' \\ \omega_0 &\approx \omega' + \omega'' \end{aligned} \quad (2.2)$$

Im Idealfall für ein unendliches Wechselwirkungsvolumen, $l_1, l_2, l_3 \rightarrow \infty$, bzw. für eine Kohärenzzeit t_c des Pumplasers $t_c \rightarrow \infty$ könnten die sinc-Funktionen durch δ -Funktionen ersetzt werden. Wir hätten perfekte Phasenanpassung und ein Gleichheitszeichen in Gl. (2.2); der Zustand für die zwei korrelierten Photonen könnte beschrieben werden analog dem zweier impulskorrelierter monochromatischer ebener Wellen, deren Frequenzen sich exakt zur Pumpfrequenz aufaddieren.

³L. Mandel, E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Chap. 22.4, Cambridge Univ. Press 1995

In der realen Situation kann aufgrund der langen Kohärenzzeit des Pumpasers (relativ zur Wechselwirkungszeit) die Phasenanpassung für die Frequenzen als exakt erfüllt angenommen werden. Dies impliziert eine strenge Korrelation der Frequenzen eines Paares und hat weitreichende Auswirkungen auf Kohärenzlänge, Phase oder Zeitkorrelation des 2-Photonen Zustands.

Sie gibt jedoch keine Auskunft über die individuelle spektrale Breite des einzelnen Photons, die nur limitiert wird durch Filter, Lochblenden, u.ä. Erst nach einer Messung ist die Frequenz des Photons, z.B. mit ω' , genau bestimmt. Damit kann allerdings auch mit Sicherheit die Frequenz des zweiten Photons $\omega'' = \omega_0 - \omega'$ vorhergesagt werden.

Ähnliches gilt für die Impulse, aber nicht in diesem Ausmaß. Die endliche Länge des Kristalles / die endliche Breite des Pumpstrahls erzeugen eine Unschärfe für die Wellenvektoren in longitudinaler / transversaler Richtung; auch die Divergenz des Laserlichtes liefert einen zusätzlichen Beitrag⁴. Die Photonen breiten sich nicht in Form von ebenen Wellen aus, sondern müssen vielmehr durch Wellenpakete beschrieben werden.

Im Extremfall von Wechselwirkungsvolumina in der Größenordnung der Lichtwellenlängen beobachtet man "Beugung aus der Quelle", die Phasenanpassungsbedingungen haben keinerlei Bedeutung mehr.

Physikalisch können die Bedingungen für die Phasenanpassung als Garant für konstruktive Interferenz zwischen den an verschiedenen Punkten entlang des Pumpstrahls erzeugten Feldern angesehen werden: bei exakter Anpassung, d.h. bei gleicher Phasengeschwindigkeit von Pumpwelle und Signal bzw. Idler Photon, erhält man eine maximale Intensität der parametrischen Fluoreszenz.

Diese Bedingung kann nur in einem doppelbrechenden Medium erfüllt werden, wo aufgrund der unterschiedlichen Brechungsindizes für die zwei Polarisationsrichtungen (ordentlich, "o", und außerordentlich, "e") gleiche Geschwindigkeiten trotz verschiedener Frequenzen erreicht werden können: z.B. ist der ordentliche Brechungsindex für die Frequenz ω gleich dem außerordentlichen Brechungsindex für die doppelte Frequenz $2\omega(\theta_m)$ für eine bestimmte Richtung: $n_o^\omega = n_e^{2\omega}$ (s. Abb. 2.1).

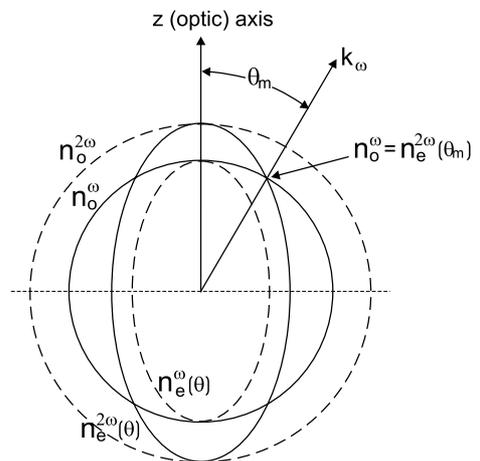


Abbildung 2.1.: Brechungsindizes in einem doppelbrechenden Medium für ordentliche und außerordentliche Polarisation

Im allgemeinen wird der Pumpstrahl mit der optischen Achse des Kristalles einen Winkel ϑ einschließen. Mittels des Brechungsindex und der Phasenanpassungsbedingungen können wir die möglichen Winkel der korrelierten Photonen in Abhängigkeit ihrer Frequenzen berechnen: quadriert man $k_0(\vartheta)$, ergibt sich nach einer kleinen Umformung der Austrittswinkel ϕ_s (ϕ_i) von Signal (Idler) zu

$$\cos(\phi_s) = \frac{\omega'^2 \cdot n_o^2(\omega') + \omega_0^2 \cdot n_e^2(\omega_0, \vartheta) - \omega''^2 \cdot n_o^2(\omega'')}{2 \cdot \omega' \cdot \omega_0 \cdot n_o \cdot n_e(\omega_0, \vartheta)} \quad (2.3)$$

Für eine bestimmte Einfallsrichtung des Pumpasers relativ zur optischen Achse des Kristalles, ϑ , sind die Wellenvektoren $k_0(\omega_0, \vartheta) = k'(\phi_s) + k''(\phi_i)$ und die möglichen Richtungen

⁴A. Joobeur, B.E.A. Saleh, M.C. Teich *Spatiotemporal Coherence Properties of Entangled Light Beams generated by Parametric Downconversion*, Phys. Rev A, 50, 3349 (1994)

der beiden Photonen eines Paares in Abhängigkeit ihrer Frequenzen genau bestimmt^{5,6}. Im entarteten Fall, für $\omega' = \omega''$, sind die beiden Austrittswinkel gleich groß.

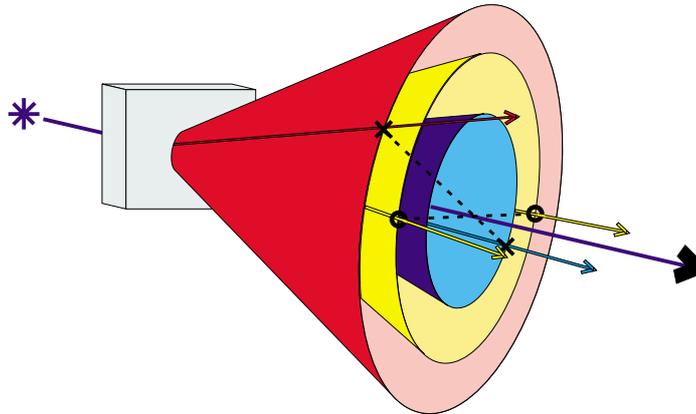


Abbildung 2.2.: Die Photonen einer Frequenz ω werden in einen Kegelmantel mit bestimmten Winkel zum UV-Strahl emittiert. Aufgrund der Impuls- und Energieerhaltung findet man ein entartetes Photonenpaar auf demselben Kegel und einander gegenüberliegend (o - "gelbe Photonen"), für den nicht entarteten Fall ist der Zwilling eines Photons auf einem Kegel mit kleinerem Winkel (x - "blaues" Photon) auf einem Kegel mit einem größeren Winkel relativ zum Pumpstrahl zu finden (x - "rotes" Photon).

Jede Frequenz ω wird in einen Kegel mit einem Winkel $\phi(\omega)$ emittiert. Die Symmetrieachsen der Kegel sind ident und liegen alle auf dem UV-Strahl (s. Abb. 2.2).

Sucht man ein Photonenpaar auf den Kegeln, so findet man die beiden Geschwisterphotonen symmetrisch, in Bezug auf den Laser einander gegenüberliegend, angeordnet: der Zwilling eines Photons auf einem Kegel mit kleinerem Winkel (x - "blaues" Photon) hat seinen Platz auf einem Kegel mit dementsprechend größerem Winkel zum Pumpstrahl⁷ (x - "rotes" Photon). Im entarteten Fall liegen beide Photonen auf demselben Kegel (o - "gelbe" Photonen), sie haben dieselbe Farbe und dieselben Winkel.

2.2.2. Zeitkorrelation, Phase und Kohärenz des Zwei-Photonen Zustands

Die zeitliche Korrelation in der Erzeugung eines Photonenpaares

Die zeitliche Differenz für die Emissionen der beiden Photonen eines Paares⁸, t_c , ist - im Gegensatz zu der eventuell angestellten Vermutung eines direkten Zusammenhanges mit der Kohärenzzeit des Pumplasers - von dieser völlig unabhängig.

Die zwei Photonen entstehen "simultan", ihre hohe zeitliche Korrelation wird nur begrenzt

⁵D. Magde, H.Mahr, *Optical Parametric Scattering in Ammonium Dihydrogen Phosphate*, Phys. Rev. 171, 393 (1968)

⁶S.E. Harris, M.K. Oshman, R.L. Byer, *Observation of Tunable Optical Parametric Fluorescence*, PRL 18, 732 (1967)

⁷D.C.Burnham, D.L.Weinberg, *Observation of Simultaneity in Parametric Production of Optical Photon Pairs*, PRL 25, 84 (1970)

⁸Y.B. Zeldovich, D.N. Klyshko, JETP Lett. 9, 40 (1969)

durch die spektrale Breite des einzelnen Photons, $t_c \approx \frac{1}{\Delta\omega_{single}}$, und damit durch die Quantenmechanik selbst (die Lokalisierung eines Quantenobjektes in der Zeit kann niemals besser sein als seine inverse Bandbreite).

Burnham und Weinberg⁷ bestimmten 1970 ein erstes oberes Limit für die zeitliche Korrelation der Photonen mit $t_c \leq 4\text{ns}$ (begrenzt durch die Zeitauflösung der Detektoren).

Mittels einer neuen Interferenztechnik, mit der bis in den Subpicosekundenbereich gemessen werden kann, bestätigten Mandel et. al. 1987 in ihrem Experiment⁹ die theoretische Vorhersage für t_c in eindrucksvoller Weise und fanden eine Korrelationszeit im Subpicosekundenbereich.

Phase und zeitliche Kohärenz des 2-Photonen Zustands

Allgemein gilt, daß ein einzelnes Photon in einem Fockzustand keine Informationen über die Phase des elektromagnetischen Feldes tragen kann, sie ist nur für das gesamte Feld genau bestimmt.

Läßt sich der Zustand des Photons allerdings als Superposition mit dem Vakuum anschreiben, so kann er sehr wohl eine definierte Phase besitzen.

Dies gilt insbesondere auch für das im Prozeß der parametrischen Fluoreszenz erzeugte Licht. Die Phase für das Photonenpaar als Ganzes ist genau bestimmt und entspricht jener des Pumplasers¹⁰.

Betrachtet man andererseits jedes einzelne Photon eines Paares für sich, so besitzt dieses keine definierte Phase mehr, die einzelnen Photonen zeigen ein Kohärenzverhalten analog dem einer thermische Quelle.

Vergleichbares ist auch für die Kohärenzzeiten zu erwarten:

- Die Kohärenzzeit des einzelnen Photons ist über das Inverse seiner spektralen Breite definiert, $t_{coh(1)} \approx \frac{1}{\Delta\omega_{single}}$. Sie ist in der Größenordnung der Kohärenzzeit einer thermischen Quelle (in unserem Experiment zur Untersuchung von Interferenzeffekten bei dynamischer Beugung erhielten wir eine longitudinale Kohärenzlänge von $220 \mu\text{m}$ ¹¹).
- Die Kohärenzzeit des 2-Photonen Zustands ist definiert durch jene des Pumplasers, $t_{coh(2)} \approx \frac{1}{\Delta\omega_{pump}}$ (sie liegt damit im Allgemeinen in der Größenordnung von cm bis m): aufgrund der hohen Frequenzkorrelation des Photonenpaares kann die spektrale Breite des einzelnen Mitglieds kompensiert werden, denn in jedem Fall müssen sich die Energien "exakt" aufaddieren; exakt heißt hier 'innerhalb der spektralen Breite des Lasers'. Dieses Verhalten konnte schon in den verschiedensten Interferenzexperimenten beobachtet werden (unter Voraussetzung der Messung in Koinzidenz¹²).

⁹C.K. Hong, Z.Y. Ou, L. Mandel, *Measurement of Subpicosecond Time Intervals between Two Photons by Interference*, PRL 59, 2044 (1987)

¹⁰Z.Y. Ou, L.J. Wang, X.Y. Zou, L. Mandel, *Evidence for Phase Memory in Two-Photon Downconversion through Entanglement with the Vacuum*, Phys. Rev. A 41, 566 (1990)

¹¹Eine Eigenschaft von parametrischer Fluoreszenz ist - wie wir schon gesehen haben - die enge Verknüpfung von Richtung eines Photons und seiner Wellenlänge. Limitieren wir die Impulsbreite der Photonen beispielsweise durch zwei Blenden im Strahlengang, kann daher die spektrale Breite verkleinert und damit die longitudinale Kohärenz vergrößert werden.

¹²es wird nur dann ein "klick" gezählt, wenn *beide* Detektoren innerhalb eines kurzen Zeitfensters, i.a. sind dies wenige ns, ein Photon registrieren

2.2.3. Ein verschränkter quantenmechanischer Zustand

Betrachtet man die Gleichung für den 2-Photonen Zustand so wird man feststellen, daß dieser nicht faktorisierbar ist

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} |\mathbf{k}'\rangle_s |\mathbf{k}''\rangle_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\mathbf{k}'\rangle_s |\mathbf{k}''\rangle_i + |\mathbf{k}''\rangle_s |\mathbf{k}'\rangle_i) \quad (2.4)$$

wobei N der Normierungsfaktor ist und die zweite Gleichung die Situation für zwei mögliche Wege beschreibt (beispielsweise durch zwei Blenden selektiert oder über die zwei möglichen Wege durch einen Doppelspalt definiert).

Der Zustand in Gl.(2.4) läßt sich *nicht* als Summe zweier voneinander unabhängiger Zustände für Signal und Idler beschreiben. Das Photonenpaar besitzt eine *gemeinsame* Wellenfunktion und ist in Frequenz und Impuls *verschränkt*.

Der rein quantenmechanische Charakter des Feldes kann explizit mithilfe der Schwartz Ungleichung, einer Bedingung, die für die Amplituden A_1 , A_2 zweier klassischer Felder gelten muß, gezeigt werden¹³

$$\langle |A_1|^2 \cdot |A_2|^2 \rangle \leq \sqrt{\langle |A_1|^4 \rangle \cdot \langle |A_2|^4 \rangle}$$

Im Falle der korrelierten Photonen kann gezeigt werden, daß diese Bedingung für klassische Felder nicht erfüllt ist: die Koinzidenzzählrate R_{12} zwischen Signal und Idler Photonen ist um mehrere Größenordnungen höher als das Produkt aus Signal-Signal bzw. Idler-Idler Koinzidenzen $(R_{11} + R_{22})!$ ¹⁴.

Es kann sicher kein klassisches Feld gefunden werden, das diese Eigenschaft aufweist: daß die Wahrscheinlichkeit zweier Detektionen an einem fixen Punkt kleiner ist als die Koinzidenzdetektion an zwei räumlich getrennten Punkten.

Man hat mit der Parametrischen Fluoreszenz einen Prozeß gefunden, der in einfach handhabbarer Weise *verschränkte*, *hochkorrelierte* und *'simultan' erzeugte* Teilchen mit in Bezug auf andere Prozesse hohen Intensitäten liefert.

Diese Eigenschaften sind es, die die Photonenpaare so vielseitig einsetzbar machen und sie prädestinieren für Experimente zu quantenmechanischen Grundlagen, wie Tests zur Bell'schen Ungleichung, Quantencomputing und -kryptographie und vieles andere mehr.

2.3. Photographie der Type-1 Parametrischen Fluoreszenz

Wir photographierten Type-1 parametrisches Fluoreszenzlicht mittels einer Kamera mit einem 50 mm Objektiv, das auf ∞ eingestellt war. Der eingelegte Film war ein Fujicolor 100, als Filter verwendeten wir einen roten M.G. Sky, eine Hama UV390 und eine Hoya Y(K2).

Die Belichtung erfolgte automatisch, sie betrug bei den einzelnen Photographien zwischen 2 und 50 s.

¹³R. Graham, PRL 52, 117 (1984)

¹⁴X.Y. Zou, L.J. Wang, L. Mandel, Opt. Commun. 84, 351 (1991)

Zur Erzeugung der korrelierten Photonen diente ein 80 mm langer LiIO_3 Kristall¹⁵, gepumpt mit einem UV-Laser bei einer Wellenlänge von 351 nm. Der Abstand zwischen Kristall und zu belichtendem Film betrug ca. 9.5 cm, zusätzlich zu den Filtern wurde der Pumpstrahl direkt hinter dem Kristall abgeblockt.

Abbildung 2.3 zeigt die photographierten Photonenkegel mit einer Aufsicht von vorne. Damit sollten Kreise mit verschiedenen Durchmessern und verschiedenen Farben als "Grundfläche" der Kegel zu erkennen sein (vergleiche auch mit Abb. 2.2).

Es ist allerdings nur ein Ausschnitt zu sehen. Die Austrittswinkel der Photonen sind zu groß (der Winkel zwischen Pumpstrahl und Kegelmantel beträgt für unseren Kristall im entarteten Fall, bei einer Wellenlänge von $\lambda_s (\lambda_i) = 702 \text{ nm}$, 28.15°), um das Gesamtbild mit der Kamera einfangen zu können. Das Bild wird begrenzt durch die Größe der Apertur der Kamera.

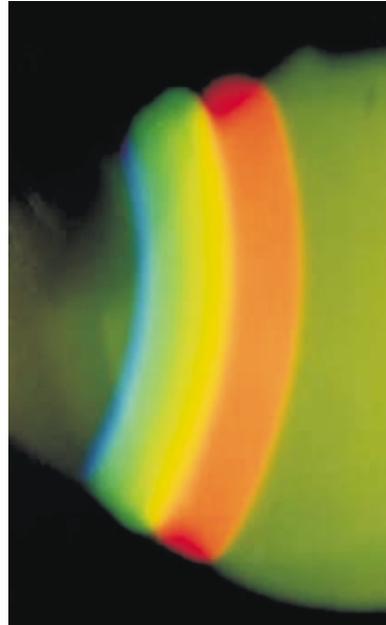


Abbildung 2.3.: Type-1 DC Licht,
Photo: M. Reck und B. Dopfer (1996)

¹⁵für das Photo verwendeten wir einen dickeren Kristall als jenen im Experiment um eine größere Rate von Photonenpaaren zu erzeugen

3. Einige grundlegende Konzepte der Quantenmechanik

3.1. Interferenz und Welle-Teilchen Dualismus

In Schulen oder in den Grundvorlesungen der Universitäten wird der Effekt der Interferenz gerne mithilfe von Wasserwellen, den Schwingungen einer Saite oder Laserlicht gezeigt. In klassischem Sinne ist das Phänomen alleine Wellen zuzuordnen und wird mathematisch beschrieben durch die Überlagerung zweier (oder mehrerer) harmonischer Schwingungen: in Abhängigkeit der relativen Phase treten positive und negative Verstärkungseffekte auf. Trifft ein Wellenberg auf einen Wellenberg, d.h. die zwei Wellen sind in Phase, so erhält man konstruktive Interferenz und die Gesamtintensität ist das Vierfache der beiden einzelnen Intensitäten (für $I_1=I_2$); sind die beiden Wellenzüge um π phasenverschoben (Wellenberg und Wellental treffen aufeinander), so interferieren die beiden destruktiv und löschen sich im Falle gleicher Einzelintensitäten völlig aus.

Erstmals solche Interferenzphänomene an Licht studiert hat Newton, der den Effekt allerdings mittels seiner Korpuskulartheorie zu erklären versuchte. Huygens hatte zwar zu etwa derselben Zeit ein weitaus einfacheres Konzept mithilfe von Kugelwellen entworfen, allerdings wurde es erst von Young zur Erklärung des nach ihm benannten Doppelspaltexperiments sowie von Fresnel wieder neu aufgegriffen.

3.1.1. Die Feynman Regeln für Interferenz

Erst mit Aufkommen der Quantenmechanik ist klar geworden, daß die Interferenz eine viel weitreichendere Bedeutung findet.

Man kann Intensitätsmodulationen nicht nur bei klassischen Wellen (zu denen im 19. Jahrhundert auch Licht - als eine elektromagnetische Welle - zählte) beobachten, auch Materieteilchen, also "massive" Quantenobjekte mit einer Ruhemasse $\neq 0$, zeigen unter bestimmten Umständen ein solches Verhalten.

Dies eröffnete eine Vielzahl neuer Gebiete wichtiger und interessanter Meßmethoden und Anwendungen; man denke dabei nur an Materialuntersuchungen in der Festkörperphysik, Messungen von Streulängen, Gravitationsmessungen u.a.

Vor allem aber weist uns die Interferenz den Weg zu den so paradox erscheinenden nichtklassischen Eigenschaften der kleinsten Teilchen (unter dem Begriff 'Teilchen' sollen hier nicht nur massive Teilchen, wie z.B. Elektronen, zusammengefaßt werden, sondern alle Objekte, die meßbare quantenmechanische Effekte zeigen, also auch Photonen u.a.).

Die Bedingungen für das Auftreten von Interferenz wurden von Feynman in seinen "Feynman Lectures on Physics"¹ in einfacher Art und Weise zusammengefaßt:

1. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in einem idealen Experiment ist gleich dem Quadrat des Absolutbetrages einer komplexen Zahl ϕ , der sogenannten Wahrscheinlichkeitsamplitude:

$$P_1 = |\phi_1|^2$$

2. Gibt es für das Auftreten eines Ereignisses mehrere alternative, ununterscheidbare Möglichkeiten, so ist die Gesamt-Wahrscheinlichkeitsamplitude gleich der Summe der verschiedenen einzelnen Wahrscheinlichkeitsamplituden: man erhält Interferenz.

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_1 + \phi_2 \\ P_{12} &= |\phi_1 + \phi_2|^2\end{aligned}$$

3. Kann im Experiment festgestellt werden, welche der alternativen Möglichkeiten tatsächlich gewählt wurde, so ist die Gesamt-Wahrscheinlichkeit gleich der Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten: die Interferenz ist zerstört.

$$\begin{aligned}P_{12} &= |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 \\ &= P_1 + P_2\end{aligned}$$

Mittels dieser drei einfachen, trotzdem zweifellos brillianten Regeln können alle Interferenzeffekte auf einfache Art und Weise verstanden werden, ohne daß auf einen komplizierten mathematischen Formalismus zurückgegriffen werden muß, der manchmal den Blick auf die Physik dahinter erschwert.

3.1.2. Ein Interferenzexperiment mit Elektronen

Anhand eines von Feynman selbst entworfenen Gedankenexperiments (siehe Abb. 3.1) kann man sich von der Anwendbarkeit der Feynman'schen Regeln überzeugen.

Elektronen, freigesetzt durch Erhitzen eines Drahtes in einer auf positiver Spannung relativ zum Draht liegenden Box, fallen auf einen Doppelspalt - dargestellt als massive Wand mit zwei Öffnungen. Dahinter befindet sich ein Schirm mit einem beweglichen Detektor. Um die Möglichkeit zu geben das Meßresultat direkt mitzuhören (klicks der auftreffenden Elektronen) kann man den Detektor an einen Lautsprecher anschließen.

Es gibt zwei mögliche Wege für das Elektron um den Doppelspalt zu passieren. Nach Feynman's zweiter Regel - und gestützt auf Resultate schon durchgeführter, ähnlicher, allerdings im Aufbau auf die Größe der deBroglie Wellenlänge des Materieteilchens abgestimmter Experimente - wird man ein Interferenzmuster sehen (oberes Bild in Abb. 3.1) mit einem Kontrast von im Idealfall 100%: wir besitzen keine Möglichkeit den Weg (oberer oder unterer Spalt) des Elektrons durch den Doppelspalt zu bestimmen und müssen zur Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung (Intensitätsverteilung) des(-r) Elektrons(-en) am Schirm das Quadrat über die Summe der Amplituden der beiden Wege bilden.

¹Feynman, Leighton, Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. III, Addison Wesley Publishing Company

Das Elektron verhält sich zweifellos wie wir es von einer klassische Welle erwarten würden, dennoch ist etwas verblüffend: bei Detektion ertönt ein scharfer klick, die Abfolge der clicks erfolgt unregelmäßig. Je nach Position des Detektors beobachtet man eine Änderung der Zählrate, was uns das Interferenzmuster liefert. Ähnliches gilt für verschiedene Temperaturen des Drahtes.

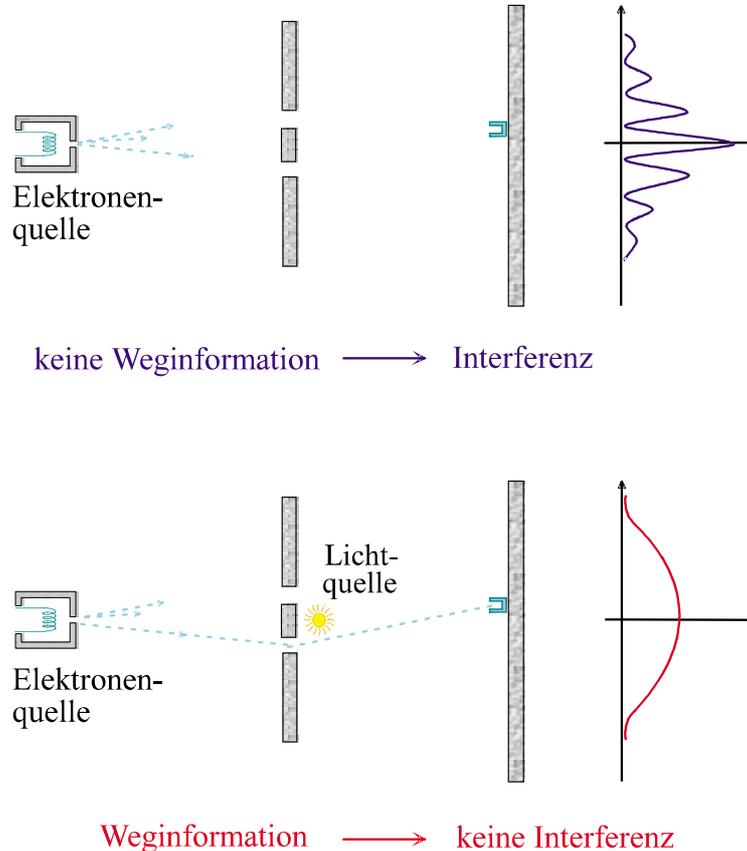


Abbildung 3.1.: Feynman's Doppelspaltexperiment mit Elektronen: besitzt man keine Kenntnis über den Weg der Elektronen durch den Doppelspalt, so wird man Interferenz beobachten. Will man nun zusätzlich die Information über den Weg des Photons erhalten, beispielsweise mittels einer Lichtquelle, so wird damit gleichzeitig jede Interferenz zerstört.

Niemals jedoch erhalten wir halbe (bzw. kontinuierlich veränderte) clicks, wie wir das z.B. von Wasserwellen erwarten würden. Ganz im Gegenteil erinnert uns dieses Verhalten eher an die Detektion von massiven Teilchen!

Natürlich stellt sich jetzt sofort die Frage nach dem einen oder anderen Weg, den das Elektron nach dieser neuen Erkenntnis doch genommen haben muß; denn da die Elektronen nur als ganze, gleichbleibende clicks detektiert werden, *müssen* sie wohl durch den einen Spalt *oder* den anderen Spalt gegangen sein.

Das Gesamtbild sollte sich also aus den Teilen "nur oberer Spalt geöffnet" plus "nur unterer Spalt geöffnet" zusammensetzen. Bei einer entsprechenden Messung stellen wir fest, daß das nicht der Fall ist: $P_{12} \neq P_1 + P_2$

Einerseits detektieren wir massive, nicht teilbare Teilchen, andererseits zeigen genau diese Teilchen Interferenz, als ob sie wie eine Wasserwelle durch beide Spalten gehen würden.

Wir könnten nun versuchen, die Elektronen, die ein solch merkwürdiges, unverständliches Verhalten an den Tag legen, durch eine kleine Modifikation im Experimentaufbau zu über-

listen (siehe unteres Bild in Abb. 3.1): mittels einer Lichtquelle direkt hinter den beiden Spalten sind wir imstande Informationen über den Weg des Elektrons zu erhalten und trotzdem beide Wege zu ermöglichen.

Tatsächlich sehen wir jedesmal, wenn ein Elektron detektiert wird, einen Lichtblitz hinter einem der beiden Spalte - und niemals von beiden Spalten; das Elektron entscheidet sich für den einen oder den anderen Weg! – Trotzdem hat unser Trick nicht funktioniert: gleichzeitig mit Erhalten der Weginformation ist das Interferenzmuster verschwunden und taucht auch nur für ein Subensemble von Elektronen wieder auf, bei deren Detektion *kein* Lichtblitz (keine Weginformation!) beobachtet werden konnte.

Versuchen wir den Weg des Elektrons herauszufinden, verhält es sich wie ein Teilchen, lassen wir ihm die Option der Wahl des Weges offen, verhält sich das Elektron wie eine Welle. Es drängt sich förmlich die Frage auf, "Was ist es denn nun wirklich?"

Feynman bezeichnete dieses 'Rätsel' als "*the basic element of the mysterious behavior in its most strange form...which is impossible, absolutely impossible, to explain in any classical way, and which has in it the heart of quantum mechanics. In reality, it contains the only mystery*"².

3.2. Die Kopenhagener Interpretation der Quantenphysik

Einen Weg, die Rätsel zu lösen und den Widersprüchen zu unseren klassischen Denkweisen zu entkommen, weist die heute von den meisten Physikern anerkannte Interpretation der Quantenphysik, die Kopenhagener Deutung.

3.2.1. Verschränkung

Zwei Teilchen, die miteinander in Wechselwirkung treten, sind von diesem Zeitpunkt an nicht mehr durch zwei unabhängige Funktionen beschreibbar. Sie müssen vielmehr über *eine* gemeinsame, nicht faktorisierbare Wellenfunktion definiert werden, völlig unabhängig davon, wie groß die räumliche Distanz zwischen den beiden Teilchen inzwischen sein mag. Man sagt dann - zurückgehend auf einen von Schrödinger geprägten Begriff - die zwei Teilchen sind miteinander "verschränkt"³ ("entangled").

Diese Eigenschaft der beiden Teilchen hat weitreichende Konsequenzen, und führt uns direkt auf das Prinzip der Nichtlokalität^{4,5}: führt man, auf welche Art und Weise auch immer, eine Messung an einem der beiden Teilchen durch (z.B. Impulsmessung oder Messung der Polarisation), so hat dies direkte *instantane, nicht-lokale* Auswirkungen auf den Satz möglicher Meßergebnisse für das zweite Teilchen^{6,7}.

²Feynman, Leighton, Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol.III, p.1-1, Addison Wesley

³E. Schrödinger, *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik*, Naturwissenschaften 23, 807-812, 823-828, 844-849 (1935)

⁴A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be considered complete?*, Phys. Rev. 47, 777 (1935)

⁵J.S. Bell, *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press (1987)

⁶A.M. Steinberg, P.G. Kwiat, R.Y. Chiao, PRL 68, 2421 (1992)

⁷J.G. Rarity, P.R. Tapster, *Experimental Violation of Bell's Inequality based on Phase and Momentum*, PRL 64, 2495 (1990)

Dies gilt allerdings nur für das Teilchenpaar; ein Beobachter, der keine Informationen über das Meßergebnis am ersten Teilchen besitzt, wird keinen geisterhaften Einfluß feststellen können.

3.2.2. Meßprozeß und Komplementarität

Der Meßprozeß selbst muß neu definiert, und die Rolle von zu messendem System, Meßapparat und Beobachter gründlich überdacht werden:

Im Gegensatz zur klassischen Physik ist es nicht mehr möglich, eine Messung als unabhängige Beobachtung anzusehen. Jede Messung impliziert eine Wechselwirkung zwischen einem Meßapparat und dem Meßobjekt, und zwar in *unkontrollierbarer* Art und Weise (*"..the interaction occurred through a single, indivisible and uncontrollable quantum.."*⁸). Sie kann - entgegen allen klassischen Vorstellungen - weder infinitesimal klein gemacht werden, noch kann für sie im Nachhinein rechnerisch korrigiert werden.

Diese *prinzipielle* Unvorhersagbarkeit des einzelnen Elementarprozesses ist es, die den Zufall und damit Indeterminismus und Akausalität mit ins Spiel bringt.

Das "Gesamtphänomen", wie es Bohr definierte, muß als eine Superposition von gemessenem Teilchen *und* dem experimentellen Aufbau verstanden werden. Beide sind untrennbar miteinander verbunden (*"..unlike a classical phenomenon, a quantum phenomenon [the whole, well defined experimental arrangement, including the setup and the initial characteristics of the object] is not a sequence of physical events, but a new kind of individual entity."*⁹). Nur im Zusammenhang mit dem jeweiligen Meßaufbau ist es sinnvoll von den Eigenschaften eines Teilchens zu sprechen.

Nach der Auffassung von von Neumann¹⁰ wäre dann auch der Beobachter selbst in die Messung miteingebunden und befände sich in einer Superposition mit dem Meßobjekt. In allen realen Experimenten ist jedoch zumindest in letzter Stufe der Meßapparat klassisch beschreibbar; Beobachter und Apparatur können als voneinander getrennt betrachtet werden.

Der Schnitt der physikalischen Welt in ein Quantensystem, das beobachtet werden soll, und in ein restliches klassisches System ist jedoch nicht nur möglich sondern auch notwendig. Erst im Klassischen können aus der quantenmechanischen Verschränkung, die die Überlagerung der verschiedenen Möglichkeiten für den Wert einer Variablen widerspiegelt, durch eine geeignete Messung definierte Resultate erhalten werden: die klassische Natur des Meßapparats verursacht einen "Kollaps" der Wellenfunktion und legt für die gemessene Variable einen Wert in eindeutiger, irreversibler Art und Weise fest. *"...thus quantum mechanics occupies a very unusual place among physical theories: it contains classical mechanics as a limiting case, yet at the same time it requires this limiting case for its own formulation..."*¹¹ Gegenargumente zu den Definitionen von Begriffen wie "Messung" oder "Meßapparat" findet man in John Bells "Against 'Measurement'"¹².

Versucht man analog zur klassischen Mechanik die Gesamtheit aller möglichen Informatio-

⁸D. Bohm, *Quantum Theory*, Chap. VI, Dover Publications, NY (1989)

⁹A. Peterson, *Quantum Physics and The Philosophical Tradition*, MIT Press (1968)

¹⁰J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Julius Springer Verlag, Berlin (1932)

¹¹L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, 3d ed., Pergamon Press (1977)

¹²J.S. Bell, *Against 'Measurement'*, Physics World, 33 (1990)

nen über ein Quantenobjekt durch mehrere verschiedene Messungen zu erhalten, so wird man feststellen müssen, daß Messungen für konjugierte Eigenschaften eines Teilchens - wie Ort und Impuls oder Energie und Zeit - die Verwendung verschiedener, *einander ausschließender* Apparaturen verlangt.

Die Resultate dürfen nicht mehr in einem einzelnen Gesamtbild zusammengefaßt werden, wie wir das aus klassischen Theorien gewöhnt sind. Vielmehr verschafft uns jede Messung einen Blick auf einen Teil der möglichen Informationen über das Teilchen.

Bohr drückte dies in folgenden Worten aus¹³ und definierte damit den Begriff der "Komplementarität", ein Prinzip, dem eine Schlüsselbedeutung in der Interpretation der Quantenmechanik zukommt:

"Consequently, evidence obtained under different experimental conditions cannot be comprehended in a single picture, but must be regarded as complementary in the sense that only the totality of the phenomena exhausts the possible information about the objects."

Zurückgreifend auf das Problem des Welle-Teilchen Dualismus in Feynmans Interferenzexperiment zeigt sich bei Anwendung des Komplementaritätsprinzips kein Paradoxon mehr. Die beiden zu messenden Eigenschaften des Elektrons (Ort \equiv Weginformation und Impuls \equiv Interferenz) sind zueinander komplementär und müssen als miteinander inkompatible Teilbilder betrachtet werden. Die Experimente zu ihrer Beobachtung schließen sich aus, es hat keinen Sinn sich zu fragen 'was wäre wenn..'

Hier sollte man sich bewußt sein, daß, egal wie sehr sich die Welt der kleinsten Teilchen von der klassischen Physik und ihren Begriffen entfernt, wir dennoch unsere Erfahrungen, unsere Meßergebnisse und Schlußfolgerungen in klassischen Termen ausdrücken müssen.

Wir verstehen die Eigenschaften sowohl von klassischen Teilchen als auch von klassischen Wellen; mit diesen zwei Begriffen ist es uns möglich unsere Beobachtungen zu den Eigenschaften der Quantenobjekte zu beschreiben. *Beide* Begriffe sind notwendig, auch wenn gleichzeitig klar ist, daß eben genau diese beiden inkompatibel - komplementär - miteinander sind.

Eng mit Bohrs Komplementarität verknüpft sind die von Heisenberg aufgestellten Unschärferelationen. Sie können zur Berechnung der Grenzen für die Unbestimmtheit von Meßgrößen herangezogen werden. Mit ihrer Hilfe kann man mathematisch präzise die maximal möglichen Genauigkeiten in der Vorhersage für die Werte zweier konjugierter, gleichzeitig gemessener Variablen ausloten und definieren.

Für Feynmans Gedankenexperiment bedeutet das: der Impulsübertrag eines Photons (auf das Elektron), dessen Wellenlänge klein genug ist um eine Bestimmung des Weges zu liefern, impliziert eine Unschärfe in den Impulsen, die gerade ausreicht um jede Interferenz auszulöschen. Verwendet man langwelligeres Licht, erhält man zwar wieder Interferenz aufgrund eines kleineren Impulsübertrages, gleichzeitig wird die Bestimmung des Weges völlig unscharf und unmöglich: die Wellenlänge des Lichtes ist genau so groß, daß das Photon von beiden Spalten hätte kommen können.

Ein von Heisenberg selbst vorgeschlagenes Gedankenexperiment, das nach ihm benannte Mikroskop, wurde in Kombination mit Feynmans Doppelspaltexperiment von uns herange-

¹³Niels Bohr, *Discussion with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics*, in A.Einstein - Philosopher Scientist, The Library of Living Philosophers IV

zogen, um die Komplementarität von Orts- und Impulsmessung experimentell zu demonstrieren.

Die Frage nach dem grundlegenden Prinzip, Komplementarität oder Unbestimmtheitsrelationen, ist von einigen Autoren heftig diskutiert worden und nachzulesen in verschiedensten Veröffentlichungen^{14,15,16,17,18}.

Zu erwähnen wären hier allerdings natürlich vor allem die Ansichten von Heisenberg und Bohr selbst:

Ersterer sah die Ursache der Unbestimmtheiten bei Durchführung einer Messung alleine in dem entsprechenden unvermeidlichen diskontinuierlichen Impulsübertrag.

Für Bohr hingegen setzten die Unschärfen nicht nur ein Limit für die Informationen, die man aus einem Experiment erhalten kann, sondern vielmehr eine limitierte Genauigkeit, mit der Änderungen im Wert der Variablen *definiert* werden können. Trotz der bereits existierenden Unschärferelationen führte er deswegen den Begriff der Komplementarität ein.

Beide Konzepte¹⁹ garantieren die Anwendung miteinander inkompatibler klassischer Begriffe, wie z.B. Welle- und Teilchenverhalten, ohne innere Widersprüche und damit die Konsistenz der Theorie.

¹⁴T.J. Herzog, J.G. Rarity, H. Weinfurter, A. Zeilinger, *Complementarity and the Quantum Eraser*, PRL 75, 3034 (1995)

¹⁵M.O. Scully, B.G. Englert, H. Walther, *Quantum Optical Tests of Complementarity* Nature 351, 111 (1991)

¹⁶P. Storey, S. Tan, M. Collett, D. Walls, *Path Detection and the Uncertainty Principle*, Nature 367, 626 (1994)

¹⁷B.G. Englert, M.O. Scully, H. Walther, *Complementarity and Uncertainty* und ein *Reply* by P. Storey, S. Tan, M. Collett, D. Walls; Nature 375, 367 (1995)

¹⁸H. Wiseman, F. Harrison, *Uncertainty over Complementarity?*, Nature 377, 584 (1995)

¹⁹B.G. Englert, *Pedagogical Remarks on some Basic Issues in Quantum Mechanics*, submitted to Europ.Journ.Phys. on Jan. 14th 1998

4. Ein Heisenbergmikroskop für Korrelierte Photonen

Im Zuge der Debatte um die Gültigkeit der Quantenmechanik Ende der 30er Jahre formulierte Werner Heisenberg die nach ihm benannten Unbestimmtheitsrelationen. Diese spiegeln den irreversiblen und unkontrollierbaren Charakter des durch eine Messung hervorgerufenen Wechselwirkungsprozesses zwischen Meßapparat und Meßobjekt wieder und halten eine Schlüsselposition zum Verständnis der Quantenmechanik inne.

1927 schlug Heisenberg ein Gedankenexperiment vor, das zur einfachen und klaren Demonstration seiner Ungleichungen dienen sollte. In diesem speziellen Fall bezieht sich das Experiment auf das konjugierte Variablenpaar Ort und Impuls und zeigt die Unmöglichkeit der gleichzeitigen scharfen Messung der beiden auf.

Diese bis dato nur als Gedankenexperiment existierende Idee konnte im Rahmen der vorliegenden Arbeit erstmals realisiert werden.

4.1. Die Ideen hinter unserem Experiment

4.1.1. Die Unschärferelationen

Multipliziert man ganz allgemein zwei Matrizen A und B miteinander, so muß deren Produkt je nach Reihenfolge der Multiplikatoren nicht unbedingt dasselbe sein. In den meisten Fällen wird gelten $AB \neq BA$.

Aus Heisenbergs mathematischen Formalismus, in dem alle meßbaren Größen durch Matrizen dargestellt werden, können direkt die Vertauschungsrelationen abgeleitet werden, die - wie man relativ einfach zeigen kann - für konjugierte Variablenpaare gelten (hier der Ort und Impuls eines Teilchens):

$$[\hat{p}, \hat{q}] = \hat{p} \hat{q} - \hat{q} \hat{p} = -i\hbar \quad (4.1)$$

Die Vorschrift für den Kommutator eines Variablenpaares birgt bereits die Unbestimmtheitsrelationen in sich; Heisenberg leitete die Relationen allgemein mithilfe des Dirac-Jordan Formalismus ab¹:

Zwei konjugierte Variablen können gleichzeitig nur mit einer charakteristischen minimalen Unschärfe bestimmt werden, limitiert durch eine Ungleichung

$$\Delta p \Delta q \geq \hbar \quad (4.2)$$

¹W. Heisenberg, *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*, Zeitschrift für Physik, 43, 172 (1927)

Eine Veranschaulichung der Unbestimmtheitsrelationen erhält man bei Betrachtung des Photons als Wellenpaket: soll der Impuls, also der \mathbf{k} -Vektor (bzw. die Wellenlänge) des Photons exakt bestimmt sein ($\Delta p=0$), so ist dies nur für eine ebene, unendlich ausgedehnte Welle möglich. Allerdings bedeutet dies für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Photons, daß sie überall dieselbe sein muß: die Unschärfe im Ort ist unendlich groß.

Vice versa ist für eine genaue Ortsbestimmung ein Wellenzug von geringster Ausdehnung vonnöten, dessen Wellenvektor dann aber dementsprechend unbestimmt ist.

4.1.2. Ein Mikroskop zur Messung von Ort und/oder (?) Impuls eines Elektrons - die ursprüngliche Idee Heisenbergs

Mithilfe eines Lichtmikroskops, präsentiert der Einfachheit halber durch eine einzelne Linse, soll der Ort eines Elektrons bestimmt werden¹ (siehe Abb. 4.1).

Im Rahmen der klassischen Optik würde man den Prozeß der Lokalisierung in folgender Weise beschreiben: eine Lichtwelle fällt auf das zu messende Objekt, wird an diesem gestreut und ein Teil der dabei entstandenen Kugelwelle wird nach Passieren der Linse auf einem Detektionsschirm aufgefangen.

Im Falle einer Ortsmessung müssen die Abstände zwischen Objekt und Linse bzw. Linse und Schirm der Abbildungsgleichung genügen (dies kann jedoch leicht - z.B. durch Verschieben des Schirmes hin zur schärfsten Abbildung - bewerkstelligt werden). Aufgrund des durch die konvergierende Lichtwelle erzeugten Bildpunktes am Schirm und der bekannten Distanz zwischen den zwei Komponenten (Abstand Linse - Schirm) kann so auf die Position des Objektes rückgeschlossen werden.

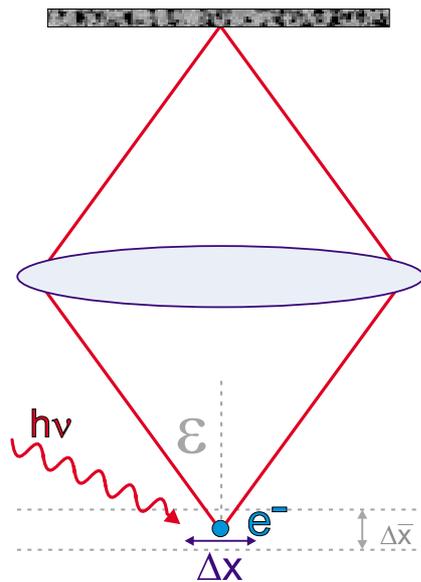


Abbildung 4.1.: Durch Streuen eines γ -Quants an einem Elektron können wir Ort oder Impuls des Teilchens messen. Zur Ortsbestimmung muß die Erfüllung der Abbildungsgleichung garantiert sein.

Quantenmechanisch betrachtet ist die Situation nicht mehr ganz so einfach: die Ortsmessung am Objekt, eines Elektrons, soll nun mittels eines Photons durchgeführt werden.

Um von diesem *einzelnen* am Schirm detektierten Photon wieder auf die Lage des Elektrons rückschließen zu können, muß sich das Elektron *vor* dieser Messung in einem ganz bestimmten Abstand zur Linse befunden haben, sodaß die Erfüllung der Abbildungsgleichung garantiert ist. Das Elektron muß sich während der Messung innerhalb eines Streifens $\Delta \bar{x}$ befinden, um mit Recht behaupten zu können, daß ein durch ein *einzelnes* Lichtteilchen erzeugter Bildpunkt die korrekte Ortsbestimmung für das Elektron liefert.

Zur Garantie einer aussagekräftigen Beobachtung ist daher eine Testmessung nötig: streut man z.B. *zwei* in hinreichend kurzer Zeit aufeinanderfolgende Photonen am Elektron, so sollten beide - innerhalb der Abbildungsungenauigkeit - am selben Bildpunkt auftreffen. Ist

dies der Fall, so können wir von einer tatsächlichen Lokalisation des Elektrons sprechen. Nur auf diese Weise erhalten wir korrekte Resultate, ohne eine Kontrolle des Ortes verliert die Messung ihren Sinn.

Wie man noch sehen wird, gibt es auch andere Methoden zur Durchführung einer Testmessung: in unserem Experiment wurde zu diesem Zweck ein Doppelspalt verwendet, ein mithilfe des Kontrastes der Interferenz sensitiver Indikator für das Maß an Orts- bzw. Impulsinformation.

Wenn wir jetzt betrachten, mit welcher Genauigkeit wir das Elektron in diesem Streifen entlang der x-Achse lokalisieren können, so ist diese limitiert durch eine minimale Abbildungsunschärfe (hervorgerufen durch Beugungseffekte aufgrund des endlichen Durchmessers der Linse). Wir erhalten ein Minimum an zulässiger Unbestimmtheit für die Position des Elektrons mit

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sin \varepsilon} \quad (4.3)$$

Im Prinzip könnte nach obiger Gleichung der Ort des Elektrons beliebig scharf gemessen werden: für sehr kleine Wellenlängen (für hohe Energien) geht die Ortsunschärfe gegen Null, $\Delta x \rightarrow 0$.

Allerdings, was passiert dann mit dem Impuls des Elektrons?

Besitzt das Lichtteilchen vor der Wechselwirkung einen Impuls $p = \frac{h}{\lambda}$, dann wird der Impulskick p' des unter dem Winkel $\varepsilon' \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ gestreuten Teilchens² gegeben sein zu $p' = p \sin \varepsilon'$. Aufgrund der Unkontrollierbarkeit und Unvorhersagbarkeit des quantenmechanischen Elementarprozesses der Wechselwirkung³ ist es völlig unmöglich, den genauen Streuwinkel des Photons zu kennen. Die resultierende Unschärfe im Impuls des Elektrons ist daher limitiert durch den maximalen Winkel zu

$$\Delta p = 2 \frac{h}{\lambda} \sin \varepsilon \quad (4.4)$$

Betrachtet man das Produkt der beiden Unschärfen, $\Delta p \Delta x$, liefert es uns ein Resultat in Übereinstimmung mit der Unschärferelation

$$\Delta p \Delta x = 2 \frac{h}{\lambda} \sin \varepsilon \frac{\lambda}{\sin \varepsilon} = 2 h \quad (4.5)$$

Je genauer wir den Ort des Elektrons messen, wozu, wie wir schon wissen, Photonen mit hohen Energien vonnöten sind, desto größer wird der entsprechende Energieübertrag auf das Elektron und damit auch seine Unschärfe im Impuls.

Vice versa benötigen wir für eine exakte Impulsmessung eine möglichst große Wellenlänge des Photons um die Störung durch den Impulskick möglichst gering zu halten. Aufgrund der Tatsache, daß das Teilchen nur auf λ genau lokalisiert werden kann, impliziert dies wieder eine entsprechende Unschärfe in der Ortsbestimmung.

Hier soll ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß die Ursache für die Unschärfen der beiden Variablen Ort und Impuls weniger in unserer Unfähigkeit liegt, eine genauere Messung durchzuführen, als vielmehr in der Tatsache, daß dies eine prinzipielle Eigenschaft aller Quantenobjekte selbst ist. Ansonsten würde die ganze Theorie ad absurdum geführt.

²wir lassen hier die aufgrund des Comptoneffekts hervorgerufene Änderung der Wellenlänge des gestreuten γ -Quants außeracht; verglichen mit der hohen Energie des Lichtteilchens ist der Übertrag auf das Elektron vernachlässigbar

³Kapitel 3.2.2, *Meßprozess und Komplementarität*

Eine ausführliche Berechnung von Heisenbergs Gedankenexperiment findet man in einer Veröffentlichung von K.F. von Weizsäcker⁴.

4.1.3. Die Ideen von Popper

Sir Charles R. Popper gehört zu den bedeutenden naturwissenschaftlichen Philosophen unseres Jahrhunderts, er beschäftigte sich eingehend mit der Quantentheorie und lieferte einige wichtige neue Denkansätze zu den Diskussionen um die Theorie.

Die Kopenhagener Interpretation, wie sie von Bohr, Heisenberg, Pauli und anderen propagiert wurde, war für ihn als Realist nicht zufriedenstellend. Er war ein Verfechter von Konzepten wie Lokalität oder der objektiven Realität der Eigenschaften der Teilchen. Für Popper sind die Unschärfen in der Bestimmung der Werte zweier konjugierter Variablen nicht als ein prinzipielles Faktum zu sehen, vielmehr soll deren Ursache alleine in der Unmöglichkeit (oder unserer Unfähigkeit), Quantenzustände ohne Streuprozesse zu produzieren, liegen.

Um dies zu testen, konzipierte Popper 1982 ein Gedankenexperiment: *I wish to suggest a crucial experiment to test whether knowledge alone is sufficient to create 'uncertainty' and, with it, scatter, or whether it is the physical situation, that is responsible for the scatter*⁵

Aus einer Quelle S werden verschränkte Teilchenpaare in entgegengesetzte Richtungen emittiert (siehe Abb. 4.2). Nach Passieren eines Spaltes variabler Größe, der sich in jedem Strahlengang (A und B) befindet, wird das Teilchen in einem der in Form von Halbkreisen angeordneten Geigerzähler detektiert. Zur Garantie der Messung der Paare sind die Zähler rechts und links der Quelle in Koinzidenz geschaltet: nur wenn zwei Detektoren - einer von jeweils einer Seite - gleichzeitig (innert weniger ns) ein Teilchen registrieren wird dies als ein klick gewertet.

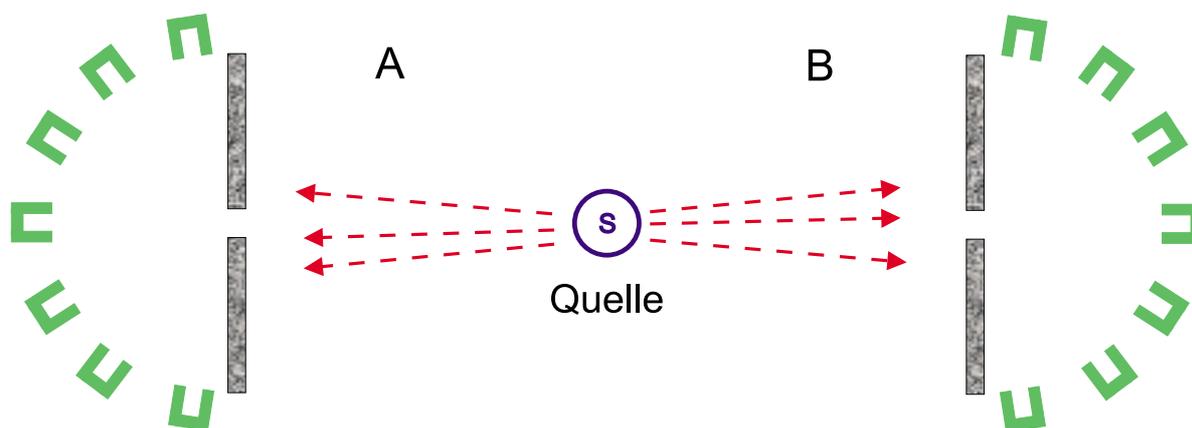


Abbildung 4.2.: Poppers Gedankenexperiment zum Test der Beziehung zwischen Information und Unbestimmtheit: aus einer Quelle werden zwei impulsverschränkte Teilchen emittiert. Wird die Position des Teilchens A auf Δq genau bestimmt, so ist auch die Position von Teilchen B bestimmt. Führt diese indirekt erhaltene Information über Teilchen B jetzt wirklich zu einer "virtuellen, geisterhaften" Streuung des Teilchens?

⁴K.F. von Weizsäcker, *Ortsbestimmung eines Elektrons durch ein Mikroskop*, Zeitschrift für Physik, (1931)

⁵K.R. Popper, *Quantum Theory and the Schism in Physics*, Chap. 1, Rowan and Littlefield, New Jersey (1982)

Zur Ortsmessung machen wir Spalt A sehr klein, im Gegensatz dazu soll Spalt B sehr groß sein (sodaß er vernachlässigt werden kann).

Die Position des gemessenen Teilchens ist auf Seite A mit einer Unschärfe Δq bestimmt, die umso kleiner ist je kleiner die Spaltgröße gewählt wird. Aufgrund der Verschränkung gilt dasselbe für das 'Partnerteilchen'.

Ist jetzt wirklich alleine die indirekt erhaltene Ortsinformation über Teilchen B ausreichend für eine "virtuelle, geisterhafte" Streuung des Teilchens?

In der Zwischenzeit haben Experimente ähnliches gezeigt. Allerdings unter entscheidend anderen Bedingungen, die die paradox wirkende Situation klären:

- Nur für eine Quelle von genügender Größe ($\gg \lambda$) ist die Impulsverschränkung zweier Teilchen überhaupt möglich (s. Punkt 2: für eine kleine Quelle in der Größenordnung der Wellenlänge erhält man Beugung des Lichtes aus der Quelle).
Nur wenn die vom Einzelspalt erzeugten Streurichtungen ihren Counterpart in den Richtungen des Geschwisterteilchens finden können (diese Richtungen also innerhalb des Limits der erlaubten Impulsrichtungen für die Teilchenpaare sind), tritt *konditionale* Beugung auf. Der Effekt kann nur in den Koinzidenzen beobachtet werden, also nur bei Messung des Zwei-Photonen Zustandes!
Die Verteilung auf Seite B für das einzelne Teilchen alleine ändert sich im Gegensatz dazu nicht und zeigt keine Beugungseffekte (was wirklich geisterhaft wäre)!
- Für eine punktförmige Quelle, wie in Poppers Experiment angedeutet, erhielte man zusätzlich zur Ortsinformation auch genaue Impulse - in scharfem Widerspruch zu Heisenbergs Unschärferelationen und Bohrs Komplementaritätsprinzip.
Dies ist jedoch unmöglich: eine kleine Quelle (in der Größenordnung der Wellenlänge des emittierten Lichtes) resultiert zwingend in einer Beugung aus der Quelle und damit im völligen Verlust der Impulsverschränkung der beiden Teilchen. Zwar ist das Beugungsmuster in jenen Einzelzählraten, in dessen Arm das Gitter steht, je nach Kohärenz der Quelle gut beobachtbar, die Möglichkeit für eine konditionale Beugung des Paares, für eine 'Beugung des Teilchens B', ist allerdings zerstört.

In Anlehnung an Popper wurde an unserem Institut 1993 ein Experiment zur Demonstration von "Nichtlokaler Beugung" durchgeführt⁶, die Rolle der verschränkten Teilchen übernahmen Photonenpaare, produziert mit parametrischer Fluoreszenz: während eines der beiden Photonen auf ein Gitter trifft (anstelle des Einzelspaltes in Poppers Vorschlag), befindet sich im Weg des anderen keine optische Komponente.

In Koinzidenz gemessen kann man das Beugungsmuster des Transmissionsgitters beobachten, und dies, obwohl jener Detektor fährt, in dessen Arm die beugende Komponente *nicht* steht. Auf die Einzelzählraten allerdings hat das im anderen Arm aufgestellte Gitter *keinen* Einfluß.

In einem anderen, ganz ähnlichen Experiment⁷ verwendeten die Autoren statt des Gitters einen Doppelspalt. Sie erhielten analoge Resultate: auch hier konnte in Koinzidenz das entsprechende Interferenzmuster gemessen werden, während die Einzelzählraten konstant blieben.

⁶R. Christanell, H. Weinfurter, A. Zeilinger *Nonlocal Diffraction*, The Technical Digest of the EQEC, p.872 (1993)

⁷D.V. Strekalov, A.V. Sergienko, D.N. Klyshko, Y.H. Shih, *Observation of Two-Photon "Ghost" Interference and Diffraction*, PRL 74, 3600 (1995)

4.1.4. Ein erstes Schema auf dem Weg zur Realisation

Aus den bisher vorgestellten Gedankenexperimenten und Ideen, u.a. auch Feynmans Doppelspaltexperiment mit Elektronen, setzt sich unsere Schema zur Realisation von Heisenbergs Mikroskop zusammen.

Die Grundidee ist die folgende: Das γ -Quant wird - wie bisher - am Elektron gestreut und nach Passieren der Linse detektiert.

Wir konzentrieren uns jedoch nicht, wie das in der ursprünglichen Idee der Fall ist, auf die Wellenlänge des gestreuten Teilchens, sondern variieren vielmehr den Winkel ε . Durch Verschieben des Schirmes zwischen Brennebene ($\Delta\varepsilon=0$) und Abbildungsebene ($\Delta\varepsilon\gg$) der Linse, definieren wir die komplementären Unschärfen und damit Impuls- und Ortsmessung. Die erforderliche Testmessung zur Verifizierung eines korrekten Resultats wird mittels eines Doppelspalts durchgeführt, den wir in den Weg der Elektronen stellen: der Kontrast des resultierenden Interferenzmusters am Schirm ist ein sensibler Indikator für das Maß an Orts- bzw. Impulsinformation (siehe Abb. 4.3):

- Wollen wir den Ort des Elektrons messen - was gleichbedeutend ist mit dem Weg durch den Doppelspalt - werden wir den Schirm so positionieren müssen, daß die Distanzen Doppelspalt - Linse (S) und Linse - Schirm (S') die Abbildungsgleichung $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$ erfüllen (mit f gleich der Brennweite der Linse). Aus der Position des gestreuten γ -Quants am Schirm können wir ablesen, durch welchen Spalt das Elektron gegangen ist, und haben 100% Weginformation.

Ist unsere Messung korrekt, so wird uns die Testmessung ein Doppelspaltinterferenzbild mit einem Kontrast gleich null, $Vis = 0$, liefern (dies entspricht den inkohärent aufaddierten Beugungsbildern der zwei einzelnen Spalte).

- Wollen wir den Impuls des Elektrons messen, so stellen wir den Schirm in die Brennebene der Linse. Jede ebene Welle, die auf die Heisenberglinse einfällt, konvergiert zu einem bestimmten Punkt in der Brennebene. Wir haben daher die Richtung des Wellenvektors und damit den Impuls des γ -Quants exakt bestimmt. Über den Ort seiner Kollision mit dem Elektron können wir allerdings keine Aussage mehr treffen: die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in einer ebenen Welle ist überall gleich groß, unsere Weginformation ist null. Unter diesen Umständen wird uns die Testmessung ein Interferenzmuster mit einem maximalen Kontrast von 100% liefern, $Vis = 1$.

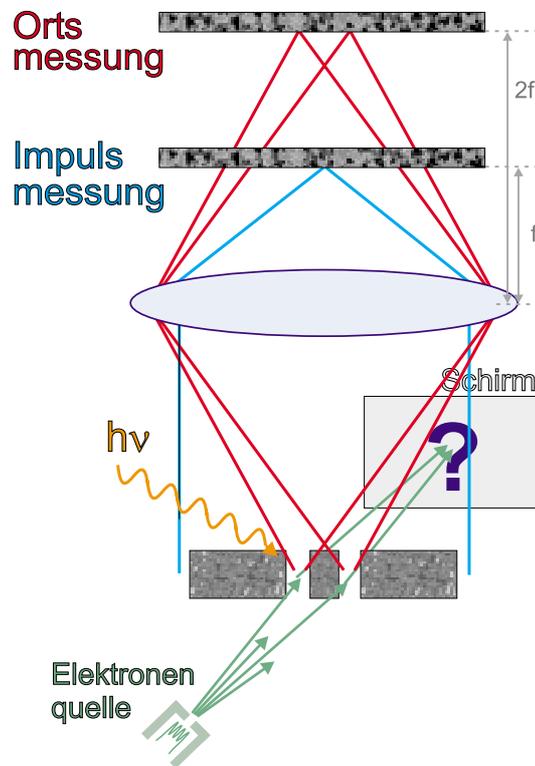


Abbildung 4.3.: Eine erste Idee zur Realisation von Heisenbergs Mikroskop

4.2. Die Realisation des Experimentes im Labor

In Analogie zu dem soeben schematisch vorgestellten, modifizierten Setup realisierten wir Heisenbergs Gedankenexperiment im Labor. Dabei werden die Rollen der in der ursprünglichen Idee vorgeschlagenen Teilchen (Elektron und γ -Quant) von den impulskorrelierten Photonenpaaren übernommen; beide Schirme (jeweils einer hinter dem Doppelspalt und einer hinter der Heisenberglinse) werden durch Detektoren ersetzt. Mit einer achromatischen Linse zur Vermeidung von Abbildungsfehlern realisieren wir ein beugungslimitiertes Mikroskop.

Ist es im Falle unsers Experiments gerechtfertigt von einer Verwirklichung des Heisenbergmikroskops zu sprechen?

Heisenbergs Gedankenexperiment:

Die beiden in der ursprünglichen Idee verwendeten Teilchen, γ -Quant und Elektron, sind aufgrund des Wechselwirkungsprozesses der Streuung miteinander verschränkt. Sie müssen über eine gemeinsame Wellenfunktion, die diese Impulsverschränkung beinhaltet, beschrieben werden. Nach einer Messung des Impulses des γ -Quants ist auch der Impuls des Elektrons bestimmt; analoges gilt für den Ort.

Die beiden Teilchen nehmen für die Ortsmessung ein breites Spektrum an Streurichtungen und damit Impulsen ein, die nur beschränkt sind durch die endliche Größe der Linse. (Jedem Impuls des γ -Quants entspricht jedoch durch den Streuprozess genau ein Impuls des Elektrons.)

In Heisenbergs Gedankenexperiment wird zur Bestimmung von Ort bzw. Impuls des Elektrons die Wellenlänge des γ -Quants variiert. Mit kleinen Wellenlängen kann der Ort, mit langwelligem Licht der Impuls bestimmt werden.

Die korrelierten Photonenpaare sind eine optimale Realisierung der ursprünglich verwendeten Teilchen. Die großen Schwierigkeiten, die auftauchen würden um die Verschränkung

Unsere experimentelle Realisierung:

Die korrelierten Photonenpaare besitzen die Eigenschaft der Impulskorrelation bereits durch ihren Entstehungsprozeß: aufgrund der Bedingung der Phasenanpassung sind die erlaubten Impulse (und auch Frequenzen) des Paares genau definiert. Mißt man den Impuls des einen Photons, so ist der Impuls des anderen Photons über die Phasenanpassungsbedingung ebenfalls bestimmt.

Das breite Spektrum an Impulsen läßt sich mit den korrelierten Photonen problemlos realisieren: die möglichen Richtungen eines Photons sind nur limitiert durch die Eigenschaften des LiIO_3 Kristalles bzw. den Schnittwinkel der Oberfläche relativ zur optischen Achse.

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} |\mathbf{k}'\rangle_s |\mathbf{k}''\rangle_i$$

Trotzdem ist aufgrund der Verschränkung jedem Impuls von Photon1 genau ein Impuls von Photon2 zugeordnet.

Wir variieren zwar nicht die Wellenlänge des Photons eines korrelierten Paares, jedoch die Position des Schirmes und damit den Winkel ε : wenn wir die Unschärfere-lation, Gl. (4.3), betrachten, so sind diese beiden Vorgehensweisen völlig analog.

für zwei (vor der Wechselwirkung) unabhängige Teilchen zu verifizieren^{8,9,10}, fallen von vornherein weg.

4.2.1. Einige zusätzliche Voraussetzungen kurz erklärt

Transversale und longitudinale Kohärenz

Für eine Quelle mit transversaler Kohärenz gilt, daß Photonen, erzeugt an verschiedenen Punkten, eine konstante Phasenbeziehung zueinander besitzen. Damit ist eine kohärente Ausleuchtung des Doppelspaltes möglich und die Bedingung für eine definierte Überlagerung der beiden Teilwege erfüllt.

Für den Zwei-Photonen Zustand ist dies der Fall, er besitzt eine über den Pumplaser definierte konstante Phase (siehe Kap. 2); die Voraussetzungen für Interferenz sind gegeben.

Allerdings gilt dies nur für beide Photonen eines Paares zusammen, die Phase für das einzelne Photon selbst ist völlig unbestimmt. Die transversale Kohärenz der Einzelphotonen entspricht jener einer thermischen Quelle. Durch Variieren des Abstands des Doppelspaltes zur Quelle kann sie verändert werden (Van Cittert-Zernike Theorem¹¹). Man wird daher in den Einzelzählraten nur ab einer noch zu definierenden Distanz zur Quelle Intensitätsmodulationen sehen (wie z.B. in Youngs Doppelspalt-Interferenzexperiment mit Sonnenlicht¹²). Für das Experiment sind Single-Interferenzen jedoch unwesentlich, sogar unerwünscht.

Die longitudinale (l_{coh}) oder zeitliche Kohärenz ($t_{coh} = \frac{l_{coh}}{c}$) des Zwei-Photonen Zustands ist gleich jener des Pumplasers. Sie liegt zwei Größenordnungen über der Wechselwirkungslänge von 1 mm, $l_{coh} \gg 1$ mm und ist damit mehr als ausreichend. Man kann die longitudinale und damit die zeitliche Kohärenz als ideal "unendlich" annehmen.

Koinzidenzdetektion

Wenn wir Heisenbergs Mikroskop realisieren wollen, so sollte bei einer Messung der Photonen jene Paare detektiert werden können, die Elektron - γ -Quant Paare, die miteinander wechselwirkten, simulieren. Denn selbstverständlich können bei einer Orts- bzw. Impulsmessung durch das γ -Quant nur am entsprechenden Elektron, dem Wechselwirkungspartner, irgendwelche Effekte beobachtet werden.

Im allgemeinen ist diese Forderung nicht unbedingt einfach zu erfüllen. Die korrelierten Photonen entstehen jedoch "gleichzeitig" - innert weniger fs (siehe Kap. 2.2.2). Wenn unsere Detektorelektronik daher nur dann weiterzählt, wenn beide Detektoren innerhalb eines sehr kurzen, definierten Zeitfensters ein Photon registrieren (in unserem Experiment war das

⁸T. Pfau, S. Spälter, Ch. Kurtsiefer, C.R. Ekstrom, J. Mlynek, *Loss of Spatial Coherence by a Single Spontaneous Emission*, PRL 73, 1223 (1994)

⁹Ch. Kurtsiefer, T. Pfau, S. Spälter, C.R. Ekstrom, J. Mlynek, A Heisenberg Microscope for Atoms, Proc. of the conference *Fundamental Problems in Quantum Theory*, Ann. of NY Academy of Science

¹⁰Ch. Kurtsiefer, O. Dross, D. Voigt, Ch.R. Ekstrom, T. Pfau, J. Mlynek, *Observation of Correlated Atom-Photon Pairs on the Single-Particle Level*, PRA 55, R2539 (1997)

¹¹L. Mandel, E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, p. 188, Cambridge Univ. Press (1995)

¹²Young beleuchtete seinen Doppelspalt mit Licht aus einer kleinen kreisförmigen Öffnung; ist der Abstand zwischen Doppelspalt und Öffnung relativ zu ihrem Durchmesser groß genug, erscheint das bei den beiden Spalten ankommende Licht als kohärent

Koinzidenzfenster 2 ns breit), können wir die Messung der beiden zueinander korrelierten Photonen und so die Messung des "γ-Quant - Elektron" Paares garantieren. Das Verhältnis von "richtigen", korrelierten Photonenpaaren zu zwei zufällig koinzidenten Photonen entspricht dabei etwa 300:1.

4.2.2. Meßaufbau und Justierung

Der genaue experimentelle Aufbau ist aus Abb. 4.4 ersichtlich: mittels eines Argonionen (Ar^+) Lasers, singlemode betrieben im UV bei einer Wellenlänge von 351,1 nm, mit einer Divergenz von 0.5 mrad (voller Winkel) und einer durchschnittlichen Leistung von ca. 100 mW, und eines nichtlinearen Mediums, einem LiIO_3 Kristall (1 cm x 1 cm x 1 mm), werden die korrelierten Photonenpaare erzeugt. Im entarteten Fall besitzen die beiden Photonen dieselbe Wellenlänge (702,2 nm), beide treten in einem Winkel von 28.14° relativ zum Pump laser aus dem Kristall aus. Zur leichteren Handhabung selektierten wir jene Paare, die sich mit dem UV-Strahl in einer Horizontalen parallel zum optischen Tisch befinden.

Ein Photon eines Paares, "das γ-Quant", (nenne dieses von nun an Signal Photon) passiert das "Heisenbergmikroskop", eine achromatische Linse, und wird in einem "Heisenberg-Detektor D1" aufgefangen.

Die relevante lichtempfindliche Größe des Detektors ist definiert über seine Breite $r_{D1} = 80 \mu\text{m}$. Er ist kontinuierlich verschiebbar über eine Distanz von 100 cm zwischen den Positionen "Brennebene der Linse" (Impulsmessung), "Abbildungsebene der Linse" (Ortsmessung) und auch darüber hinaus.

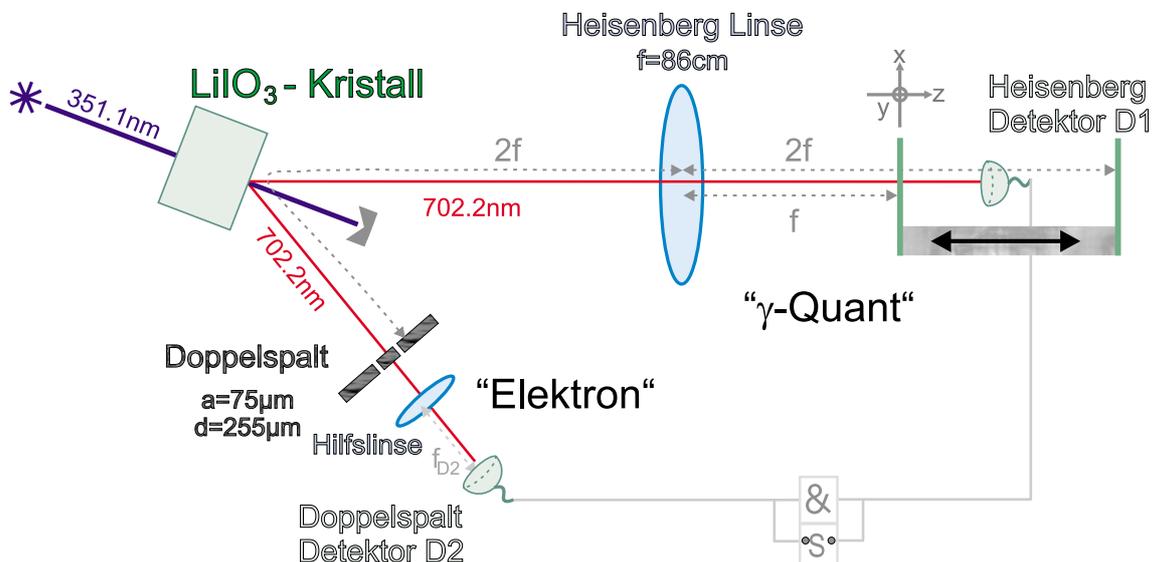


Abbildung 4.4.: Der experimentelle Aufbau im Labor. Eines der beiden Photonen übernimmt die Rolle des Elektrons und wird hinter einem Doppelspalt (Testmessung) detektiert, das Partnerphoton simuliert das γ-Quant, mit dessen Hilfe die Orts-/Impulsmessung durchgeführt wird.

Die Detektionseinheit D1 (wie auch D2) ist auf einem xyz-Schlitten montiert, wobei die z-Richtung (\parallel zur Ausbreitungsrichtung der Photonen) und die y-Richtung (\parallel zur Länge der Spalten) mit einer Micrometerschraube justiert werden können. Die x-Richtung (\parallel zur Breite der Doppelspalten; für die Beugungs- und Interferenzeffekte relevante Richtung) kann

mittels eines Schrittmotors abgetastet werden.

Die Heisenberglinse hat einen Durchmesser von 7.6 cm, ihre Brennweite beträgt 86 cm.

Um etwaige Platzprobleme auf der Tischplatte zu vermeiden wurde der UV-Laser mit Spiegeln in einem Winkel von 28.14° zum Tischrand justiert; analoges gilt für den Kristall, sodaß der Laserstrahl senkrecht auf ihn auftrifft. Damit verläuft die Ausbreitungsrichtung des Signal Photons parallel zur längeren Seite des Tisches.

Im Weg seines Geschwisterphotons, "des Elektrons" (Idler Photon), befindet sich ein Doppelspalt, anhand dessen die Testmessung durchgeführt wird. Der Doppelspalt besteht aus zwei Spalten mit Spaltbreiten $a=75\ \mu\text{m}$ und einem Spaltenabstand d von $d=255\ \mu\text{m}$.

In einem Abstand von 10 cm hinter dem Doppelspalt befindet sich eine "Hilfslinse" ($f=15\ \text{cm}$) und in deren Brennebene der "Doppelspalt-Detektor D2" ($r_{D2} = 40\ \mu\text{m}$).

Die Abstände in diesem Teilarm (insbesondere jener zwischen der Hilfslinse und Doppelspalt-Detektor D2) ändern sich in keiner Messung, die Linse selbst hat v.a. den Zweck die Distanzen möglichst kurz zu halten für ein späteres Experiment mit verzögerter Entscheidung der Art der Messung (Impuls- oder Ortsmessung). Die Linse rückt im wesentlichen das Interferenzmuster aus dem Nahfeldbereich in das Fernfeld.

Ihre Wirkung kann auf zwei Arten beschrieben werden:

- Die Linse verursacht einen Übergang vom realen Raum in den \mathbf{k} -Vektorraum, d.h. jeder Punkt in der Brennebene ist genau einem \mathbf{k} -Vektor und damit genau einer bestimmten Beugungsrichtung zugeordnet.
- Die Linse setzt den Doppelspalt ins Unendliche: der Doppelspalt-Detektor befindet sich in der Brennebene der Linse und sieht in jedem Punkt eine ebene Welle mit bestimmter Richtung: der Doppelspalt scheint sich im Unendlichen zu befinden.

Man erhält ein scharfes Interferenzmuster, dessen Abstände der einzelnen Maxima und Minima nur bestimmt sind durch die Brennweite der Linse. Ohne Linse müßte entweder ein Detektor mit kleinerer empfindlicher Fläche verwendet oder der Abstand Detektor-Doppelspalt größer gewählt werden, ansonsten wäre ein Abtasten über das Interferenzmuster zu grob und der Kontrast empfindlich kleiner.

Mittels Interferenzfiltern (zentrale Wellenlänge $700\pm 5\text{nm}$) werden die Detektoren in die richtige Position gebracht: die Richtlinie ist zuerst eine maximale Einzelzählrate für die Wellenlänge 702 nm, dann wird auf eine maximale Koinzidenzzählrate justiert.

Zur Justierung der optischen Komponenten wäre ein sichtbarer Lichtstrahl von Vorteil. Wir stellten daher justierte Irisblenden in die Strahlengänge und fädelten einen HeNe-Laser durch die Blenden hindurch. Anhand des sichtbaren Lichtstrahles werden Heisenberglinse und Doppelspalt, sowie die 'Hilfs'linse hinter dem Doppelspalt justiert. Mit dem parametrischen Fluoreszenzlicht können die letzten Feinheiten zur Optimierung der Zählraten / des Aufbaus nachgestellt werden.

Für die Durchführung der Messungen wurden die Blenden und Filter entfernt: im Falle der Impulsmessung liefert der Aufbau selbst eine weitaus exaktere Farb- und Impulsselektion, als es die Fabry-Perot Filter je könnten.

Befindet sich Detektor D1 in der Brennebene der Heisenberglinse, so können bei einer Detektorgröße von $80\ \mu\text{m}$ nur mehr Photonen registriert werden, die sich innerhalb eines bestimmten Winkels $\Delta\alpha$ befinden:

$$\Delta\alpha = \pm \frac{r_{D1}/2}{f} = 4.6 \cdot 10^{-5} \text{rad}$$

Aus den Messungen der Austrittswinkel der korrelierten Photonen, (α), in Abhängigkeit ihrer Farbe, (λ), erhält man eine an die Daten angepaßte Funktion. Die Wellenlängenselektion, die sich aus der Funktion ergibt und obigem Winkel entspricht, berechnet sich zu $\lambda = 702.2 \pm 0.3907 \text{ nm}$ (siehe App. A). Die spektrale Breite bewirkt keine beobachtbaren Auswirkungen auf das Interferenzbild, keine meßbare Reduktion des Kontrastes.

Im Falle der Ortsmessung müssen genug Richtungen möglich sein, um die ganze Breite der Linse auszuleuchten, was eine scharfe Abbildung garantiert. Für unsere achromatische Linse ist die Ortsmessung dann nur noch durch Beugungsfehler (siehe Kap. 73) limitiert.

Mit Interferenzfiltern, die die Wellenlänge (und für parametrische Fluoreszenz damit auch die Richtungen) des Lichtes auf einen kleinen Bereich von wenigen nm limitieren, wäre dies nicht möglich.

An dieser Stelle sollte noch erwähnt werden, daß die Detektoren - aufgrund des Fehlens von Interferenzfiltern, die nur Licht bestimmter, spezifizierter Wellenlängen transmittieren - jede noch so kleine Lichtquelle 'sehen' können, was zu einer entsprechenden Empfindlichkeit v.a. in den Einzelzählraten führt. Es muß daher noch sorgfältiger, als bei Experimenten mit Einzelphotonen-Detektion schon notwendig, auf absolute Dunkelheit geachtet werden.

4.2.3. Das Klyshko Bild - ein schneller Weg zu einem intuitiven Verständnis

Um den tatsächlichen Experimentaufbau mit den zu erwartenden Ergebnissen anschaulich und schnell verstehen zu können ist das "Klyshko Bild"¹³ von großem Nutzen:

Zu jedem Impuls eines Photons existiert genau *ein* Impuls seines Geschwisterphotons; der Kristall kann als "ebener Spiegel" betrachtet werden, allerdings als Spiegel mit einer gewissen Tiefe. Unser Kristall hat eine Dicke von 1 mm, wir können die "Tiefe des Spiegels" aber vorerst einmal vernachlässigen¹⁴.

Wir handhaben den Meßaufbau in der Art, als wäre einer der beiden Detektoren durch eine "Quelle" ersetzt: hier startet das Licht, passiert alle Komponenten, wird vom "Spiegel" reflektiert und schließlich auf der anderen Seite detektiert.

Selbstverständlich entspricht dies nicht dem realen Aufbau; aufgrund der beschriebenen Eigenschaften der korrelierten Photonen funktioniert Klyshko's kleine Denkhilfe jedoch gut und ermöglicht ein schnelles Erkennen der zu erwartenden Resultate.

Es gibt zwei alternative Möglichkeiten das Experiment durchzuführen (Heisenberg-Detektor D1 befindet sich für beide Fälle in einer variierenden Entfernung zur Linse und definiert damit die Art der Messung): entweder tastet D1 die jeweiligen Intensitätsmodulationen ab und Doppelspalt-Detektor D2 ist fixiert, oder aber D2 fährt und D1 ist fix.

a.) Abtasten der Intensitätsmodulationen mit Doppelspalt-Detektor D2

Der Heisenberg-Detektor D1 simuliert die Quelle, während die resultierenden Intensitätsmodulationen mittels des Doppelspalt-Detektors D2 abgetastet werden. Dies entspricht un-

¹³D.N. Klyshko, Sov. Phys. JETP 67, 1131 (1988)

¹⁴die Länge des Kristalles (= die Tiefe unseres Spiegels) verursacht eine Abbildungsunschärfe; es kann nicht unterschieden werden, ob ein Photonenpaar zu Beginn oder am Ende des Kristalles erzeugt wurde; genaueres dazu in Kap 4.2.5

serer Vorstellung von einem Heisenbergmikroskop mit einer Testmessung, dessen Ergebnis wir durch Abfahren von Detektor D2 erhalten.

Im Falle einer Impulsmessung befindet sich Detektor D1 bzw. die virtuelle Quelle im Fokus der Linse (siehe Abb. 4.5). Das ausgestrahlte Licht kann nach Passieren der Heisenberglinse nur genau einen \mathbf{k} -Vektor besitzen (für eine punktförmige "Quelle"), dessen Richtung bestimmt wird durch die genaue Position der "Quelle" in der Brennebene. Das Licht verhält sich wie eine ebene Welle.

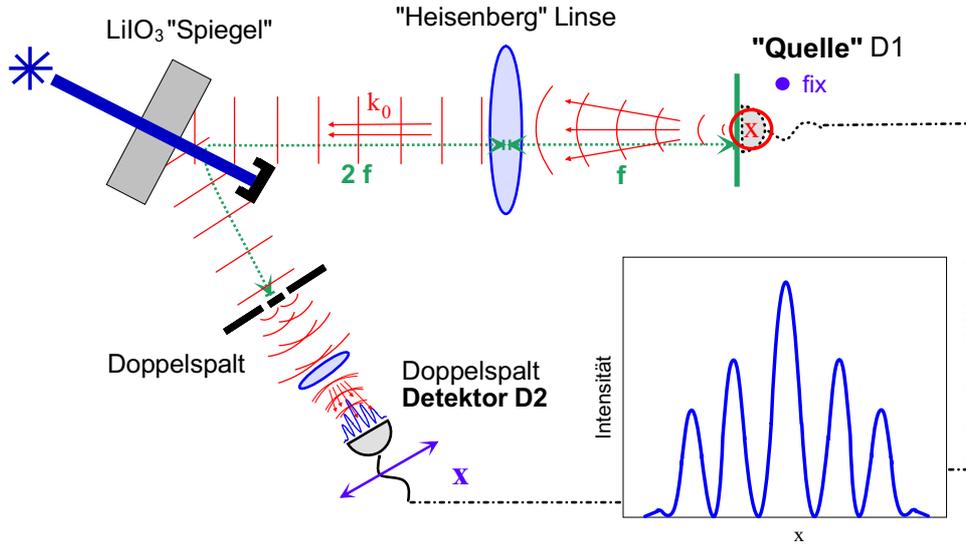


Abbildung 4.5.: Klyshko-Bild für Impulsmessung; die Rolle der Quelle wird von Heisenberg-Detektor D1 übernommen, D2 tastet das resultierende Interferenzmuster ab

Nach "Spiegelung" am Kristall wird das Licht am Doppelspalt gebeugt und wir erwarten Intensitätsmodulationen beobachten zu können mit einer Verteilung gleich jener, wie man sie bei Beleuchtung eines Doppelspalt, z.B. mit Laserlicht, erhalten würde

$$I(x_{D2}) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a x_{D2}}{\lambda f_{D2}}\right) \cos^2\left(\frac{\pi d x_{D2}}{\lambda f_{D2}}\right), \quad \text{mit } \text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (4.6)$$

Die Intensitätsverteilung setzt sich zusammen aus zwei Beiträgen: die Einhüllende ($\cong \text{sinc}^2$) wird von der Spaltbreite a und der Brennweite der Hilfslinse f_{D2} bestimmt, die Frequenz der Modulationen ($\cong \cos^2$) innerhalb dieser Einhüllenden vom Spaltenabstand d und ebenfalls von der Brennweite f_{D2} ¹⁵. Die Anzahl der möglichen Interferenzstreifen ist durch das Verhältnis von Spaltenabstand zu Spaltbreite gegeben.

Fahren wir mit der Quelle (Heisenberg-Detektor D1) zurück in Richtung Abbildungsebene, so sind immer mehr Richtungen für das Photon hinter der Heisenberglinse erlaubt und damit aufgrund der Impulsverschränkung auch für das Geschwisterphoton.

Jede der erlaubten Richtungen erzeugt ein entsprechend verschobenes Interferenzmuster (eine entlang der x -Achse um Δx verschobene Quelle erzeugt bei gleichen Abständen für Quelle-Doppelspalt und Doppelspalt-Schirm ein Interferenzmuster, dessen Einhüllende eine entsprechende Verschiebung gerade wieder um Δx aufweist).

In der Abbildungsebene der Linse (siehe Abb. 4.6) können wir die inkohärente Überlagerung

¹⁵ohne unsere Hilfslinse, die den Doppelspalt ins Unendliche setzt, stünde anstelle von f eine Distanz $D = \text{Doppelspalt} - \text{Detektor D2}$

der Beugungsbildern von den beiden Spalten¹⁶ beobachten.

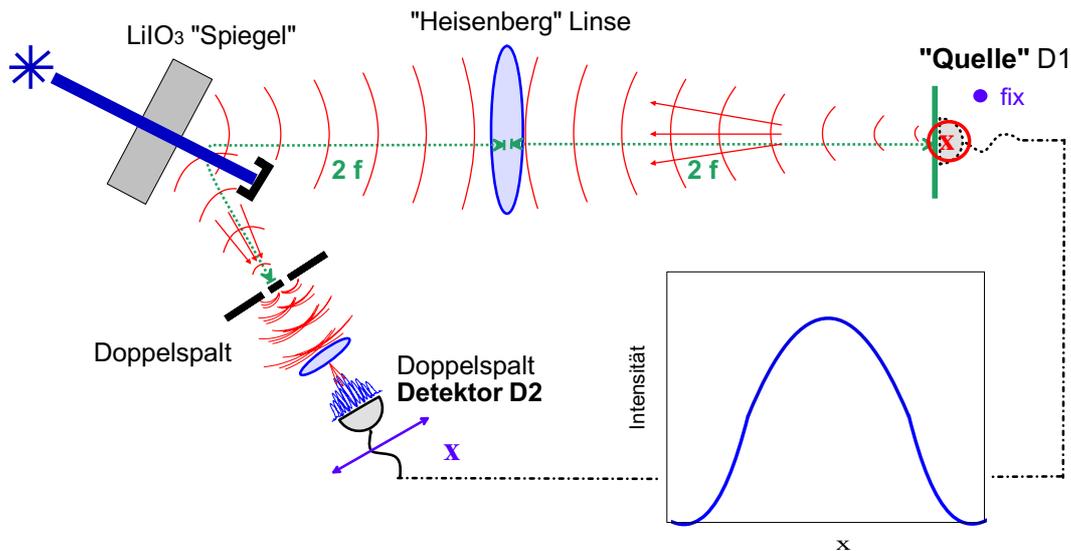


Abbildung 4.6.: Klyshko-Bild für Ortsmessung: die Rolle der Quelle wird von Heisenberg-Detektor D1 übernommen, D2 tastet das resultierende Modulationsmuster ab

Der Interferenzkontrast ist auf Null abgesunken, was uns die Bestätigung liefert, daß wir den Weg des Photons durch den Doppelspalt nachgewiesen haben.

b.) Abtasten der Intensitätsmodulationen mit Heisenberg-Detektor D1

Hier sind nun die Rollen der beiden Detektoren vertauscht: während der Heisenberg-Detektor D1 die Intensitätsmodulationen abfährt (also allgemein betrachtet jener Detektor, in dessen Arm der Doppelspalt *nicht* steht), übernimmt der Doppelspalt-Detektor D2 die Rolle der Quelle.

Detektor D2 verändert seine Position für keine der ganzen Messungen und befindet sich in der Brennebene unserer Hilfslinse. Aufgrund dessen fällt auf den Doppelspalt eine Überlagerung ebener Wellen ein; ist der Detektor eine Punktquelle, so ist dies eine ebene monochromatische Welle.

Die Welle wird an den Spalten gebeugt und die zwei resultierenden Kugelwellen interferieren zu einem Modulationsmuster. Nach der Reflexion am Kristall passieren die Intensitätsmodulationen die Heisenberg Linse und erfahren einen positionsabhängigen (relativ zur optischen Achse) Phasenschub.

Im Fall einer Impulsmessung befindet sich der fahrende Detektor D1 in der Brennebene der Heisenberglinse (siehe Abb. 4.7).

Wir erhalten völlig analog zu der umgekehrten Situation (Punkt a.) Abtasten der Modulationen mit Doppelspalt-Detektor D2) ein Doppelspalt-Interferenzmuster nach Gl. (4.6), dessen Einhüllende ($\cong \text{sinc}^2$) von der Spaltbreite a und der Brennweite der Heisenberglinse, f_{D1} und dessen Frequenz der Intensitätsmodulationen ($\cong \cos^2$) vom Spaltabstand d und

¹⁶um für eine Ortsmessung beide Spalten zu beleuchten, muß die Quelle (Detektor D1) groß genug sein: eine zu kleine Quelle, deren Licht zum Doppelspalt abgebildet wird, beleuchtet dort auch nur jenen Teil, der ihrer Größe entspricht; bei einer 1:1 Abbildung können für eine Quellgröße $\leq d+a$ *nicht beide* Spalten beleuchtet werden!

ebenfalls der Brennweite bestimmt werden¹⁷.

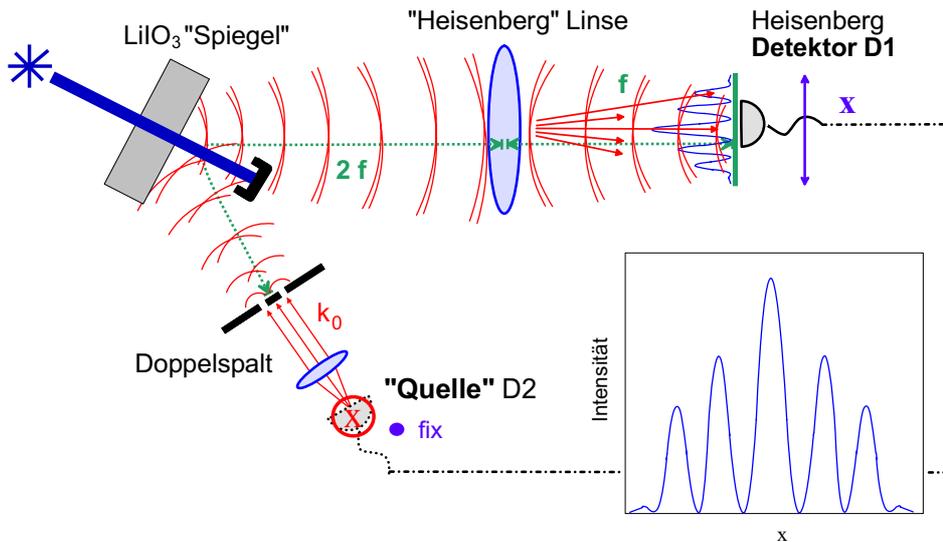


Abbildung 4.7.: Klyshko-Bild für Impulsmessung: die Rolle der Quelle wird von Doppelspalt-Detektor D2 übernommen, D1 tastet das resultierende Interferenzmuster ab

Je weiter wir mit Detektor D1 zurückfahren in Richtung der Abbildungsebene der Linse, desto mehr kommen abbildende Elemente hinzu.

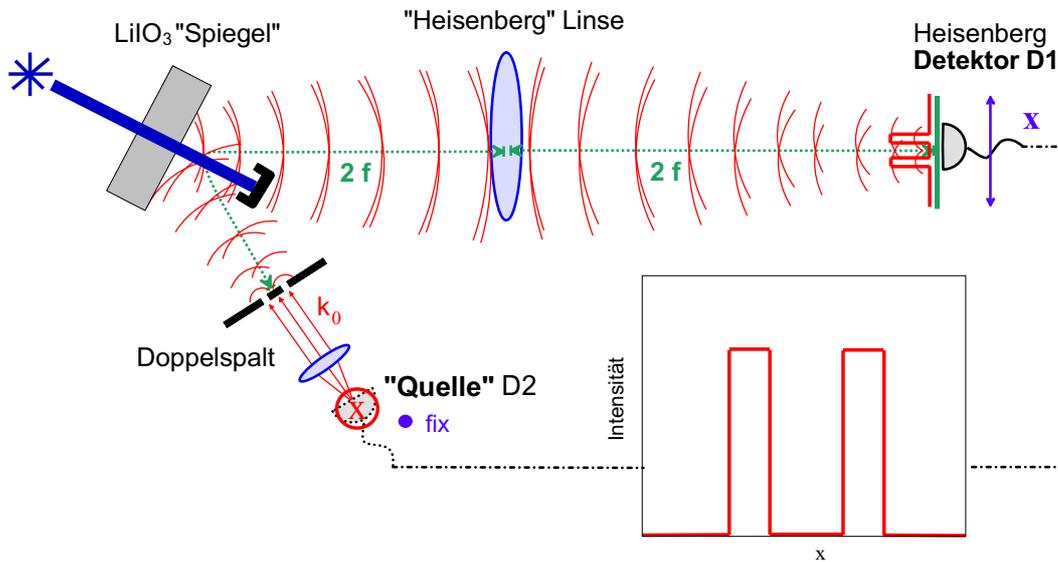


Abbildung 4.8.: Klyshko-Bild für Ortsmessung: die Rolle der Quelle wird von Doppelspalt-Detektor D2 übernommen, D1 fährt das resultierende Modulationsmuster ab

Einerseits wird der Kontrast des Interferenzmusters immer kleiner, andererseits wird jedoch auch die Breite des Musters entlang der x-Achse (entlang der Abtastrichtung) immer schmaler, bis wir im Falle einer Ortsmessung (siehe Abb. 4.8) eine Abbildung des Doppel-

¹⁷ dies hatte in unserem Experiment vor allem die Folge, daß aufgrund der verschiedenen großen Brennweiten von Hilfslinse und Heisenberg Linse, im ersten Fall das Interferenzmuster innerhalb der Einhüllenden 0. Ordnung eine Breite von etwa 3 cm, im zweiten Fall jedoch das Interferenzmuster - hinter der Heisenberg Linse - eine Breite von 16 cm aufwies

spaltes in Form von zwei Rechtecken beobachten können:

$$I(x_{D1}) \propto \begin{cases} 1 & \text{für } (\frac{d}{2} - \frac{a}{2}) \leq |x_{D1}| \leq (\frac{d}{2} + \frac{a}{2}) \\ 0 & \text{für sonst} \end{cases} \quad (4.7)$$

Obige Beschreibung der Intensität gilt für eine 1:1 Abbildung und den Idealfall eines unendlich kleinen abtastenden Detektors.

Ein Objekt, in diesem Fall unser Doppelspalt, wurde kohärent beleuchtet und wir können dessen Bild aufgrund der Linse in der konjugierten Ebene beobachten.

Das Experiment in dieser Art und Weise durchzuführen ist v.a. aufgrund der Tatsache, daß für die Impulsmessung Interferenzen beobachtbar sind, auch wenn der Doppelspalt gar nicht im Arm des abtastenden Detektors steht, besonders faszinierend. Der Effekt ist eine direkte Konsequenz aus der nur quantenmechanisch beschreibbaren Verschränkung der beiden Photonen eines Paares. Messen wir mithilfe der Koinzidenzmeßmethode den vollständigen Zwei-Photonen Zustand, so erhalten wir auch die vollständige Information über den gesamten Meßaufbau; es ist nicht mehr wichtig, in welchem Arm der Detektor fährt.

Erstmals solche "Ghost"-Interferenz und Beugung gesehen wurde an unserem Institut 1993 und von Shih et.al. 2 Jahre später (wie schon bei der Beschreibung von Poppers Gedankenexperiment zitiert). Allerdings weisen die Experimente nur für den speziellen Fall einer Impulsmessung eine Analogie zu unseren Messungen auf.

c.) Ein reales Bild

Versucht man sich die zu erwartenden Meßergebnisse ohne eine Denkhilfe über imaginäre Quellen und Spiegel zu erklären, so ist das jetzt nicht mehr so schwierig:

- Ortsmessung: Je weiter wir uns von der Brennebene entfernen, desto mehr Richtungen sind für das Signal Photon erlaubt - und damit auch für das Idler Photon. Interferenzmuster mit verschiedenen Mittenpositionen überlagern, der Kontrast des Interferenzmusters nimmt stetig ab.

Befindet sich D1 in der Abbildungsebene, sind alle geometrisch möglichen Richtungen erlaubt: die Impulse jener Photonen, die einen der beiden Spalte passieren können, verlangen jedoch solche Impulse ihrer Geschwisterphotonen, die in der Abbildungsebene auf einen "Punkt" konvergieren (ohne Abbildungsunschärfen). Ein Abtasten von Heisenberg-Detektor D1 liefert eine Abbildung des Doppelspaltes.

Fährt man das Muster mittels Doppelspalt-Detektor D2 ab, liefert dies ein Einzelspalt-Beugungsbild (für einen kleinen Detektor D1) oder eine inkohärente Überlagerung der Beugungsbilder von den beiden Spalten (Detektor D1 ist größer als das Bild des Doppelspaltes in der Abbildungsebene): die vielen möglichen Richtungen (\equiv ebenen Wellen mit verschiedenen \mathbf{k} -Vektoren), die auf den Doppelspalt einfallen, verursachen jede einen Phasenschub proportional zu ihrem Einfallswinkel, ϑ_x , mit $\varphi = k x = k \vartheta_x d$. Ist die Phase gleich einer vollständigen Periode, $\varphi = 2\pi$, so führt die Überlagerung der

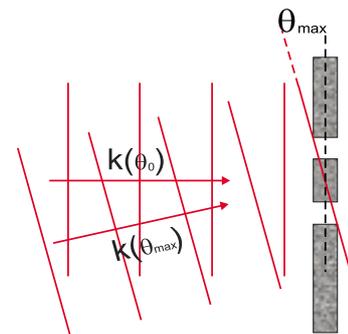


Abbildung 4.9.: $\vartheta_x \neq 0$

Modulationen mit verschobenen Mittenpositionen zur vollständigen Verwischung der Interferenz. Der zugehörige 'Auswischungs'winkel ist $\vartheta_x = \lambda/d$.

Definieren wir als maximalen Winkel $\Delta\alpha$ jenen, der die nullte Beugungsordnung des Interferenzmusters genau einfaßt ($\text{sinc}^2(\frac{\pi a x}{\lambda f}) = \pi$), so erhalten wir mit $\Delta\alpha = 2\lambda/a > \vartheta_x$ einen Wert, der sogar größer als der vorher definierte nötige 'Auswischungs'winkel ist.

- Impulsmessung: Befindet sich der Heisenberg-Detektor D1 in der Brennebene der Linse, so wird er nur jene Photonen sehen und detektieren können, die *eine*, ganz bestimmte Richtung besitzen; jedem Punkt in der Brennebene ist genau ein \mathbf{k} -Vektor zugeordnet. Aufgrund der Impulsverschränkung ist die Richtung des Geschwisterphotons ebenfalls exakt bestimmt und auf einen Impuls beschränkt: der Doppelspalt wird kohärent ausgeleuchtet und wir sehen in den Koinzidenzen das zu erwartende Interferenzmuster.

Der Aufbau ist symmetrisch; analoges gilt deshalb für den Doppelspalt-Detektor D2. Wir sehen dasselbe Muster (wenn auch mit verschiedener Breite der Einhüllenden), unabhängig davon, welcher der beiden Detektoren fährt.

4.2.4. Unsere Komponenten

Der Doppelspalt

Die kommerziell erhältlichen Doppelspalte wurden produziert durch chemisches Aufdampfen einer Nickellegierung auf eine Schablone. Mithilfe desselben Prozesses werden von der Firma auch Aufdampfmasken, Lochblenden oder Elektronen Mikroskop Gitter erzeugt¹⁸. Die Nickelfolie besitzt eine Dicke von $5\ \mu\text{m}$, sie ist auf einem $0.5\ \text{mm}$ dicken Glasplättchen befestigt. Zur besseren Handhabung befinden sich Glasplättchen mit Folie in einem Diarahmen (siehe Abb. 4.10).



a [μm]	d [μm]
35	255
35	525
75	255
75	525

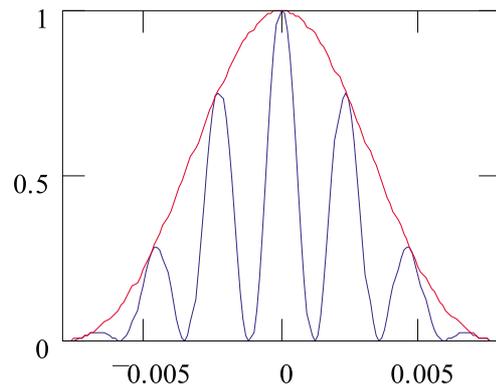


Abbildung 4.10.: Diarahmen mit den vier verschiedenen Doppelspalten

Abbildung 4.11.: Beispiel für das Interferenzbild eines Doppelspaltes

Es stehen vier Doppelspalte zur Verfügung mit Spaltbreiten a von $40\ \mu\text{m}$ bzw. $80\ \mu\text{m}$ und Spaltabständen d (der Abstand ist definiert von der Mitte des ersten Spaltes zur Mitte des zweiten) von $250\ \mu\text{m}$ bzw. $500\ \mu\text{m}$, spezifiziert auf eine Toleranz von $\pm 5\ \mu\text{m}$. Die Messung

¹⁸bezugnehmend auf die Informationen des Herstellers (<http://www.pasco.com>)

unter einem Mikroskop mit einem Vergrößerungsfaktor von 1:200 ergab etwas veränderte Werte von $a = 35 \mu\text{m}$ bzw. $75 \mu\text{m}$ und $d = 255 \mu\text{m}$ bzw. $525 \mu\text{m}$.

Die für die Interferenz- und Beugungseffekte nicht relevante Länge der rechteckigen Spalten beträgt 5 mm.

Für das Experiment wurde ein Doppelspalt mit $a = 75 \mu\text{m}$, $d = 255 \mu\text{m}$ ausgewählt, wobei a die Breite der Beugungsordnungen (der Einhüllenden) bestimmt und d die Frequenz der in den Beugungsordnungen enthaltenen Interferenzstreifen (siehe Abb. 4.11).

Die größere Spaltbreite ermöglicht höhere Intensitäten; mit dem kleineren Spaltenabstand sind in der nullten Beugungsordnung $\frac{d}{a} = 5$ Interferenzstreifen zu erwarten. Zwar könnte man für $d = 525 \mu\text{m}$ 10 Maxima sehen, allerdings innerhalb der durch a vorgegebenen Breite derselben Einhüllenden; es wäre ein sehr viel kleinerer Detektor erforderlich um Datensätze mit zufriedenstellenden Interferenzkontrasten aufnehmen zu können.

Die Linse

Hier sollen nur die Eigenschaften der verwendeten Linse diskutiert werden; die durch eine imperfekte Linse verursachten Abbildungsunschärfen bilden aufgrund ihrer nicht zu vernachlässigenden Bedeutung für das Experiment ein eigenes Kapitel. Analoges wird auch für den Kristall gelten.

Unsere Linse ist ein Achromat¹⁹, zusammengesetzt aus einer bikonvexen und einer konkavkonvexen Linse, die durch einen Luftspalt von 0.1 mm separiert sind. Dieser Spalt wird realisiert durch drei kleine, am äußeren Rand einer (der beiden) Linse angebrachte Folienstücke.

In einer auf den Durchmesser ϕ und die Gesamtdicke angepaßten Halterung sind die beiden Linsen fix zueinander montiert (siehe Abb. 4.12). Zur besseren Stabilisierung besitzt die Halterung zwei Gewinde für zwei Posts (normalerweise ist nur ein Gewinde üblich).

Eine breitbandige dielektrische Antireflexbeschichtung (MgF_2) garantiert in einem Wellenlängenbereich von 400 bis 750 nm eine Reduktion störender Reflexionen auf einen durchschnittlichen Maximalwert von 1.5%.

Um eine Aufhebung bzw. Minimierung von Abbildungsfehlern zu ermöglichen, werden die zwei Linsen aus zwei verschiedenen Glasarten hergestellt und die Radien, zentralen Dicken, t_c , u.a. entsprechend aufeinander abgestimmt.

Laut Hersteller werden die Oberflächen beider Linsen im Laufe des Produktionsprozesses interferometrisch untersucht und die zusammengesetzte gesamte Linse wird schließlich noch-

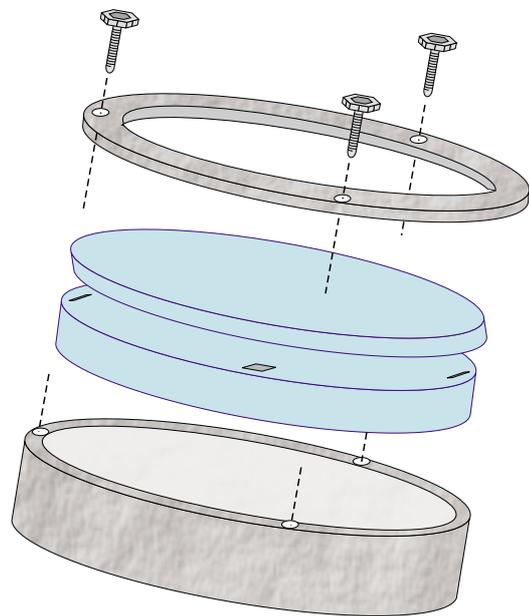


Abbildung 4.12.: Eine Halterung für unsere Heisenberglinse (speziell nach und den Maßen des Achromats in unserer Werkstatt gefertigt).

¹⁹Edmund Scientific Katalog, 1996 Optics & Optical Components, Seite 31 und 44

mals ausgetestet um sie als Achromat zertifizieren zu können. Die im Katalog angegebenen Spezifikationen sind in Tabelle 4.1 zusammengefaßt.

	Dia. ϕ [mm]	t_c [mm]	R1 [mm]	R2 [mm]	Glasart	n	f [mm]
Linse 1	$76.5 \pm 0.1\%$	13.08 ± 0.76	497.21	-345.82	BK7	1.517	396.72
Linse 2	$76.5 \pm 0.1\%$	10.16 ± 0.76	-344.2	-1227.86	SF2	1.648	-741.68

Tabelle 4.1.: Vom Hersteller spezifizierte Daten für den Achromat

Zusammen mit diesen Daten erhält man mittels der Linsenmacher Formel

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left[\frac{1}{R1} - \frac{1}{R2} + \frac{t_c (n - 1)}{R1 R2 n} \right]$$

Brennweiten für die beiden Linsen von $f_1 = 396.73$ mm und $f_2 = -741.68$ mm. Zusammengesetzt ($f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d}$) ergibt dies rechnerisch eine Brennweite des Achromaten von $f = 824.9$ mm.

Wir haben die Brennweite unseres Achromaten experimentell mittels einer sogenannten "shear plate"²⁰ bestimmt: dieses Kollimationsmeßinstrument ist ein einfaches Interferometer, das aus einer dicken, qualitativ hochwertigen optischen Glasplatte besteht (schließlich soll nur die Wellenfront des zu messenden Lichtes eine Rolle spielen und nicht Unebenheiten des Meßinstrumentes).

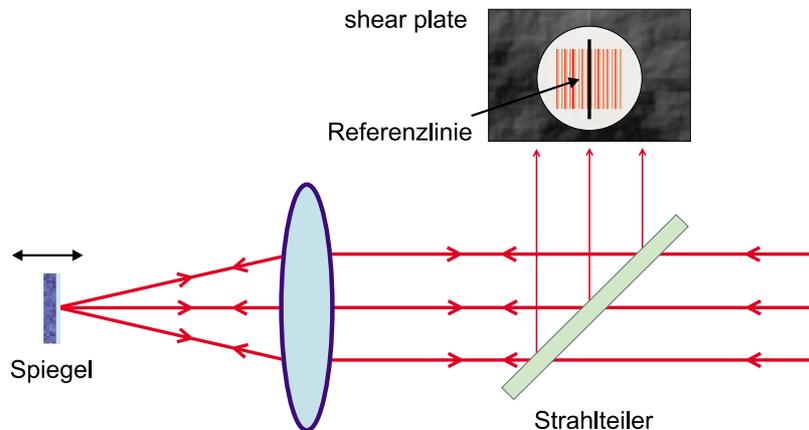


Abbildung 4.13.: Messung der Brennweite der Heisenberglinse mittels einer Shear Plate

Der zu testende Lichtstrahl sollte in einem Winkel von 45° auf die Glasplatte einfallen; er wird jeweils an der unbeschichteten Vorder- und Rückfront reflektiert. Die so erzeugten Wellenfronten überlagern und liefern ein Interferenzmuster, das auf einem kleinen Schirm mit einer Referenzlinie für ebene Wellen beobachtet werden kann. Ist der Lichtstrahl perfekt kollimiert, so verlaufen die Interferenzstreifen parallel zur Referenzlinie, ansonsten bilden sie mit ihr einen entsprechenden Winkel.

Wenn wir mithilfe eines Spiegels das einfallende Licht wieder in sich selbst zurückreflektieren und die shear plate vor der Linse in den Strahl stellen (siehe Abb. 4.13), können wir durch Beobachten der Neigung der Interferenzstreifen den genauen Brennpunkt der Linse ermitteln: befindet sich der Spiegel in der Brennebene, so wird das rückreflektierte Licht

²⁰Melles Griot Katalog 1997, Abschnitt *Laser Quality Measurement Systems*

die Linse als parallelen Strahl verlassen und Interferenzstreifen parallel zur Referenzlinie erzeugen.

Wir erhielten mit dieser Meßmethode eine Linsenbrennweite von $f = 860 \text{ mm} \pm 2 \text{ mm}$; der Fehler resultiert hauptsächlich aus dem Abmessen der Strecke.

Seine Bestätigung fand der Wert der Brennweite in den Messungen zur Ortsbestimmung: im Abstand von 1720 mm hinter der Linse findet man die scharfe Abbildung des Doppelspaltes - selbstverständlich unter der Voraussetzung, daß die Distanz Doppelspalt - Kristall - Linse ebenfalls 1720 mm beträgt ($\frac{1}{2f} + \frac{1}{2f} = \frac{1}{f}$).

Der nichtlineare Kristall

Das nichtlineare Medium zur Erzeugung der korrelierten Photonen ist ein LiIO_3 - Kristall mit einer Dicke von 1 mm und einer vorder- bzw. rückseitigen Fläche von 1 cm x 1 cm.

LiIO_3 ist ein hygroskopisches Material. Aus diesem Grund ist der Kristall in ein Aluminiumgehäuse von der Form eines Zylinders zentral eingebaut, mit zwei antireflexbeschichteten Fenstern als Deckflächen.

Für unseren Verwendungszweck ist das Verhältnis der Höhe des Zylinders, $h=5 \text{ cm}$, zu seinem Radius, $r=0.9 \text{ cm}$, zu klein. Die korrelierten Photonenpaare können nicht austreten, sondern werden von der Zylinderwand absorbiert. Im entarteten Fall gilt: $\tan \alpha_{\text{Photon}} = \tan 28.15^\circ > \frac{2r}{h}$ (analoges gilt auch für andere Paare; ist ein Ausfallswinkel klein genug, so ist der andere dafür umso größer).

Wir verwendeten für den Kristall eine andere Halterung, die allerdings nicht abgedichtet war. Um jede Wassereinlagerung zu vermeiden, wurde die neue Halterung mit einem Draht umwickelt und durch Anlegen eines Stromes von 1 Ampere auf etwa 30° Celsius geheizt.

Der Kristall ist auf beiden Seiten antireflexbeschichtet, jedoch mit verschiedenen Spezifikationen und für verschiedene Wellenlängen und Einfallswinkel:

	Wellenlänge	Winkel	Reflektivität
Pumplaser zugewandte Seite:	350 nm	0°	0.5 %
Austrittsseite für Photonenpaare:	700 nm	30°	0.15 %

Andere Daten zum Kristall findet man in Appendix A.

Die Detektionseinheit

Wir verwendeten Silizium-Lawinen-Photodioden in einem Bereich 20 V über der Durchbruchspannung: das einfallende Photon löst eine Lawine von Elektron - Loch Paaren aus und erzeugt so einen Puls, der detektiert werden kann²¹.

Zur Minimierung der Dunkelzählraten werden die Dioden mithilfe eines integrierten Peltier Elementes gekühlt, die überschüssige Wärme kann mittels eines Wasserkreislaufes abgeleitet werden. Man erreicht mit dieser Kombination eine Kühlung auf etwa -14 bis -20°C .

Die Detektoren besitzen eine annähernd kreisförmige lichtempfindliche Fläche mit einem Durchmesser $\phi = 500 \mu\text{m}$; damit würden wir allerdings selbst im besten Fall einen Kontrast der Interferenzstreifen von nur 19% erhalten, was uns für eine schöne Demonstration der

²¹G. Denifl, Einzelphotonen - Detektoren für Quantenkorrelations - Experimente, Diplomarbeit, Universität Innsbruck (1993)

Komplementarität von Orts- und Impulsmessung bzw. von Heisenbergs Unschärferelationen zu wenig ist.

Für einen besseren Kontrast könnten Faserdetektoren verwendet werden. Der effektive Detektordurchmesser reduziert sich für den Fall von Singlemodedfasern auf $5\mu\text{m}$ (!), für Multimodefasern auf $50\mu\text{m}$. Leider bringt die sehr kleine Detektionsfläche auch eine Reduktion sowohl der Einzel- als auch der Koinzidenzzählrate mit sich.

Beide Ziele, möglichst hohe Zählraten und ein maximaler Kontrast, scheinen unvereinbar. Wenn wir allerdings die Geometrie des Doppelspaltes berücksichtigen, finden wir die optimale Lösung:

Der Doppelspalt ist aus zwei rechteckigen Spalten aufgebaut, jeder mit Seitenlängen $l \times a = 5\text{mm} \times 75\mu\text{m}$. Die beobachtbaren Beugungs- und Interferenzeffekte treten in x-Richtung, parallel zur Breite a auf: das resultierende Muster weist entlang dieser Richtung Intensitäts-

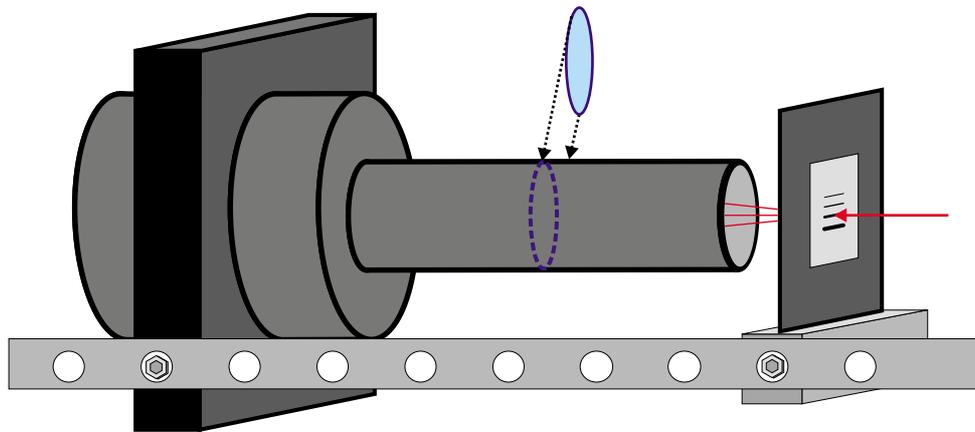


Abbildung 4.14.: Die Detektoreinheit

modulationen auf mit einer konstanten Breite von 5mm (die Beugungseffekte aufgrund der Länge der Spalten, l , können vernachlässigt werden).

Um die gesamte Intensität eines solchen Interferenzmaximum-Streifens einfangen zu können, ist eine rechteckige Detektionsfläche mit (mind. 5mm) \times ($x < 100\mu\text{m}$) ideal. Wir realisierten sie mittels einer Linse (Brennweite $f = 3.5\text{cm}$) und eines einzelnen Spaltes mit den Abmessungen $l_{Esp} \times a_{Esp} = 5\text{mm} \times 80/40\mu\text{m}$: beide Komponenten, Einzelspalt und Linse, werden am Detektorgehäuse fixiert, sodaß sie eine gemeinsame optische Achse besitzen (siehe Abb. 4.14). Genügen die Distanzen Einzelspalt - Linse und Linse - Detektor der Abbildungsgleichung, wird alles Licht, das auf den Spalt trifft, in den Detektor abgebildet und damit gezählt.

Wir erhielten mit dieser Konstruktion variable "Detektorflächen" von $5\text{mm} \times 80\mu\text{m}$ bzw. $5\text{mm} \times 40\mu\text{m}$, was einen theoretisch möglichen, maximalen Interferenzkontrast von 99% impliziert.

4.2.5. Die im Experiment gewählten Distanzen

Der Abstand Doppelspalt - Kristall

Der Abstand zwischen Doppelspalt und Kristall (D) definiert einerseits die Möglichkeit, Interferenzen auch in den Einzelzählraten zu sehen (oder genau dies zu verhindern), anderer-

seits muss darauf geachtet werden, daß alle Richtungen, die ein Doppelspaltinterferenzbild ausmachen, durch die korrelierten Photonen realisierbar sind.

Interferenz in den Einzelzählraten.- Betrachtet man nur Idler Photonen (jene Photonen eines Paares, die auf den Doppelspalt treffen), so wird man in den Einzelzählraten Interferenzen sehen, wenn die Quelle kohärent ist.

Die einzelnen Photonen haben dieselben Kohärenzeigenschaften wie eine thermische Quelle. Ihre Phasen sind unkorreliert (nur die Phase für den Zwei-Photonen Zustand ist definiert). Wenn wir den Abstand D groß genug wählen, sodaß das auf den Doppelspalt fallende Licht aus einem kleinen und daher kohärenten Ausschnitt der Quelle stammt, können Interferenzen beobachtet werden.

Die maximale Distanz ρ_{coh} , die die beiden Spalten bei Beleuchtung mit einer ausgedehnten inkohärenten kreisförmigen Quelle aufweisen dürfen um Interferenz beobachten zu können, berechnet sich aus²²:

$$\rho_{coh} = 1.22 \frac{\lambda}{\theta_Q} \quad (4.8)$$

λ ist die Wellenlänge des einfallenden Lichtes und θ_Q ein Maß für die Größe der Quelle, $\theta_Q = \frac{\text{Quellendurchmesser}}{\text{Abstand Quelle - Doppelspalt}}$.

Mit den Daten für unser Experiment (Doppelspalt: $d+a = 255 + 2\frac{75}{2} \mu\text{m} = 330 \mu\text{m}$; $\lambda = 702 \text{ nm}$; Quellgröße = $2 \text{ mm} - \frac{1}{e^2}$ -Breite des Pumplasers), müßte der Abstand zwischen Quelle und Doppelspalt mindestens $D = 770.41 \text{ mm}$ betragen

$$\text{für Einzelzählrateninterferenz:} \quad D \geq 770 \text{ mm}$$

Nur unter dieser Bedingung können Interferenzen in den Einzelzählraten beobachtet werden: In unserem Aufbau werden wir daher kein Interferenzmuster in den Einzelzählraten beobachten können.

Interferenz in den Koinzidenzen.- Um Interferenzen in den Koinzidenzzählraten sehen zu können, muß eine gerade komplementäre Bedingung für den Abstand D des Doppelspaltes zum Kristall (bzw. für die Größe der Quelle) erfüllt sein.

Alle jene Richtungen, die nötig sind um das Interferenzmuster zu ermöglichen, müssen für die Photonenpaare erlaubt sein. Wir können nur jenen Teilbereich des Intensitätsmusters beobachten, für den die nötigen Impulse realisierbar sind.

Nehmen wir das Klyshkobild zwecks eines leichteren Verständnisses zuhilfe: interpretieren wir den Doppelspalt-Detektor D2 als imaginäre Quelle, so können wir nach dem Kristall nur dann das Doppelspalt-Interferenzmuster beobachten, wenn unser "Spiegel" - die transversale Breite des Pumplasers - groß genug ist dieses auch zu reflektieren.

Verlangen wir, daß obige Bedingung für die nullte Beugungsordnung zutrifft, so erhalten wir ein Limit für D mit

$$\sin^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda D}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{a}{\lambda} x$$

Mit einer Breite des Pumplasers, $x = 2 \text{ mm}$, muß für die 0. Beugungsordnung der Abstand zwischen Kristall und Doppelspalt kleiner als 107 mm sein

$$\text{für Koinzidenzinterferenz:} \quad D \leq 106 \text{ mm}$$

In unserem Experiment beträgt der Abstand zwischen Quelle und Doppelspalt 40 mm , also innerhalb dieser Grenzen. Es sind explizit $n = \frac{a x / 2}{\lambda D} = 2.67$ Beugungsordnungen möglich, was

²²B.E.A. Saleh, M.C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, J. Wiley & Sons Inc. (1991)

jedoch aufgrund des Durchmessers der Linse (76 mm) auf $n = \frac{a \cdot 76 \cdot 10^{-3} / 2}{\lambda D} = 2.36$ eingeschränkt wird.

Komplementarität von Einzelzählraten- und Koinzidenz Interferenz.- Aus den bisherigen Ausführungen kann entnommen werden, daß entweder Interferenz in den Einzelzählraten oder in den Koinzidenzen beobachtet werden kann, jedoch nie beide Typen gleichzeitig mit 100% Kontrast.

Dies gilt nicht nur aus irgendwelchen geometrischen Gründen oder auf dieses Experiment beschränkt, vielmehr ist es ein allgemeines Prinzip und folgt direkt aus der Quantenmechanik^{23,24}:

Interferenz in den Koinzidenzen impliziert Impulsverschränkung der beiden beteiligten Teilchen. Verzichtet man auf die Beobachtung der Interferenzen in den Koinzidenzen und bestimmt auf einer Seite die Richtung des Teilchens (und damit auch die Richtung seines korrelierten Partners), könnte man direkt auf den Weg des anderen durch den Doppelspalt Rückschlüsse ziehen. Für erlaubte Einzelzählraten-Interferenz hätten wir ein Paradoxon mit zwei inakzeptablen Lösungen:

1. es wäre möglich, gleichzeitig den Ort und Impuls eines Teilchens beliebig exakt zu kennen. Dies verletzt sowohl Unschärferelationen als auch Komplementarität und würde die Quantenmechanik ad absurdum führen.
2. es gibt eine unbekannt Kommunikation über Zeit und Distanzen zwischen voneinander unabhängigen Teilchen. Wie sollen sonst die einzelnen Photonen auf der Seite des Doppelspalt wissen (wir messen nicht den Zwei-Photonen Zustand!, wir messen nicht in Koinzidenz), wann sie kohärent interferieren dürfen und wann nicht!

In einem Gedankenexperiment von Greenberger, Horne und Zeilinger²⁵ demonstrierten die Autoren die Komplementarität von Einzelphotonen- und Koinzidenzinterferenz anhand eines Zwei-Photonen Doppelspalt - Interferenzexperimentes: beide Photonen eines korrelierten Paares passieren jedes einen Doppelspalt und werden auf einem Schirm detektiert.

Variiert man die Größe der Quelle (analog könnte man auch die Distanz zwischen Quelle und Doppelspalt variieren), können beide Interferenz Typen beobachtet werden, jedoch nie beide gleichzeitig mit maximalem Kontrast!:

- Quellgröße $\approx \lambda$:

Ist die Größe der Quelle in der Größenordnung der Lichtwellenlänge, so kann es aufgrund von Beugung aus der Quelle keine Impulskorrelationen zwischen den Photonen eines Paares mehr geben. Sie sind völlig unabhängig voneinander.

Je nach Kohärenz der Quelle²⁶ kann Interferenz in den Einzelzählraten beobachtet werden.

In den Koinzidenzen sind selbstverständlich keine Intensitätsmodulationen mehr zu beobachten, der verschränkte Zwei-Photonen Zustand ist zerstört und die beiden Photonen verhalten sich wie zwei völlig unabhängige Teilchen.

- Quellgröße $\gg \lambda$:

Ist die Quelle groß genug um Impulsverschränkung des Photonenpaares zu erlauben,

²³G. Jaeger, M.A. Horne, A. Shimony, *Complementarity of One - particle and Two - particle Interference*, PRA 48, 1023-1027 (1993)

²⁴C.K. Hong, T.G. Noh, *Two-photon double slit interference experiment*, JOSA B 15 (3), 1192 (1998)

²⁵D.M. Greenberger, M.A. Horne, A. Zeilinger, *Multiparticle Interferometry and the Superposition Principle*, Physics Today, 22-29 (August 1993)

²⁶hier kann man aufgrund ihrer minimalen Größe $\approx \lambda$ davon ausgehen, daß die Kohärenz gewährleistet ist

sehen wir keine Interferenzen in den Einzelzählraten: im Prinzip ließe sich mithilfe des Signal Photons der Weg des Idler nachvollziehen, was ausreicht um jede Interferenz auszulöschen.

In den Koinzidenzen können wir allerdings die Intensitätsmodulationen beobachten. Aufgrund der Koinzidenzmessung ist jedwede Möglichkeit zur Beschaffung von Weginformation ausgeschlossen.

Für Quellgrößen zwischen diesen beiden Extrema erhalten wir beide Interferenztypen, allerdings mit entsprechend verminderten Kontrasten.

Die Distanzen der Komponenten zueinander: 1:1 Abbildung

Wir entschieden uns für eine 1:1 Abbildung, mit folgenden Abmessungen für die einzelnen Distanzen:

Doppelspalt - Kristall		40 mm
Kristall - Heisenberg - Linse	2 f-40 mm	1.68 m
Heisenberg - Linse - Detektor D1	(f-) 2 f	(0.86 m -) 1.72 m

Der Grund für die Wahl einer 1:1 Abbildung liegt in den Größen der uns zur Verfügung stehenden Detektoren und des Doppelspaltes.

Die Silizium-Lawinen-Photodioden haben einen Durchmesser von $\phi = 500 \mu\text{m}$; verwenden wir den Aufbau mit Linse und Einzelspalt, so können wir diesen abhängig von der Größe des verwendeten Einzelspaltes reduzieren auf 40 oder 80 μm .

Wir können einerseits mittels der kleinen Detektorfläche die beiden rechteckförmigen Intensitätsmaxima (die beiden Spalten des Doppelspaltes) in der Abbildungsebene getrennt voneinander messen ($a = 35 \mu\text{m}$, $d = 255 \mu\text{m}$) und den Weg des Photons eindeutig nachweisen. Andererseits, unter Verwendung der Maximalfläche des Detektors, können Photonen von *beiden* Maxima auf *einer* Detektorfläche detektiert werden. Die Entscheidung, welchen Weg das Idler Photon gegangen ist, ist nicht mehr möglich und es stellt sich die Frage nach einer Rekonstruktion des Interferenzmusters.

Reicht die prinzipiell vorhandene Möglichkeit, den Weg des Photons zu messen, aus um jede Interferenz zu zerstören, oder erhalten wir bei Nichtbeachtung von Ortsinformation die Interferenz zurück? (*"Is the moon there when nobody looks?"*, David N. Mermin²⁷)

4.2.6. Abbildungsunschärfen

Linsenfehler

Um Abbildungsfehler möglichst zu vermeiden, haben wir eine achromatische Linse verwendet, die sich mit dem Doppelspalt auf einer gemeinsamen optischen Achse befindet.

Die Linse, ein Doublet (siehe Kap. 73), ist konstruiert für eine bestmögliche Korrektur der chromatischen Aberration (nach den Spezifikationen des Herstellers ist die Linse frei von diesem Fehler). Chromatische Aberration wird verursacht durch die Dispersion; der Brechungsindex und damit die Brennweite einer Linse sind eine Funktion der Wellenlänge, $n = n(\lambda)$: für blaues Licht befindet sich der Fokus näher bei der (positiven) Linse als für

²⁷N.D. Mermin, *Is the moon there when nobody looks? - Reality and the Quantum Theory*, Physics Today (April 1985)

rotes Licht.

Ein zweiter wichtiger Linsenfehler, die sphärische Aberration, hat seine Ursache in der Kugelform der Linse. Die Brechkraft ist für Lichtstrahlen entfernter der optischen Achse größer, als sie sein sollte: der Fokus des Lichtes liegt näher zur Linse als für achsennahe Strahlen. Laut Hersteller²⁸ ist auch dieser Fehler vernachlässigbar, er ist kleiner als $\frac{\lambda}{4}$.

Andere bekannte Abbildungsfehler wie Astigmatismus, Bildfeldwölbung und -krümmung sowie Koma können ebenfalls vernachlässigt werden. Sie verursachen Unschärfen von wenigen Micrometern bzw. darunter (einen Formalismus, diese zu berechnen, findet man in verschiedenen Optikbüchern²⁹).

Der Achromat ist beugungslimitiert, die Schärfe der Abbildung wird nur eingeschränkt durch den Durchmesser der Linse selbst. Um zu definieren, wann zwei punktförmige Lichtquellen noch als separat beobachtet werden können, ziehen wir das Rayleigh Kriterium²⁹ heran: wenn das Zentrum des einen Airy-Scheibchens (= Abbildung eines Punktes) mit dem ersten dunklen Ring des zweiten genau überlappt, dann sind die beiden Punkte gerade noch unterscheidbar. Wir erhalten einen minimalen Abstand

$$x_R = \frac{0.61 \lambda}{N.A.}, \quad \text{mit } N.A. = \frac{\phi_{Licht}}{2f} \quad (4.9)$$

wobei N.A., die numerische Apertur, sich berechnet aus dem tatsächlich beleuchteten Durchmesser und der Brennweite der Linse.

Der minimale Abstand, um zwei abzubildende Punkte noch unterscheiden zu können,

$$x_R = 9.6 \mu m$$

(mit $\lambda = 702.2 \text{ nm}$, $f = 86 \text{ cm}$ und $\phi_{Licht} = 7.6 \text{ cm}$) impliziert eine Unschärfe von derselben Größe.

Unschärfen verursacht durch den Kristall

Wenn wir Klyshkos Bild heranziehen, können wir den Kristall als Spiegel mit einer gewissen Tiefe - entsprechend seiner Dicke - interpretieren. Dieser Denkansatz läßt uns sofort auf folgende Problematik stoßen:

Besitzen die zwei "Reflexionen" von der Vorderwand und der Rückwand des "Spiegels" einen Abstand voneinander in der Größenordnung des Spaltabstandes d , so schmiert die Abbildung völlig aus und wir erhalten kein scharfes Bild mehr.

Im Falle einer Ortsmessung kann mithilfe des Signal Photons dann nicht mehr unterschieden werden durch welchen Spalt das korrespondierende Idler Photon nun wirklich ging, da dieses an einer beliebigen Stelle innerhalb des Kristalles entlang der Ausbreitungsrichtung des Pumplasers entstanden sein kann (siehe Abb. 4.15).

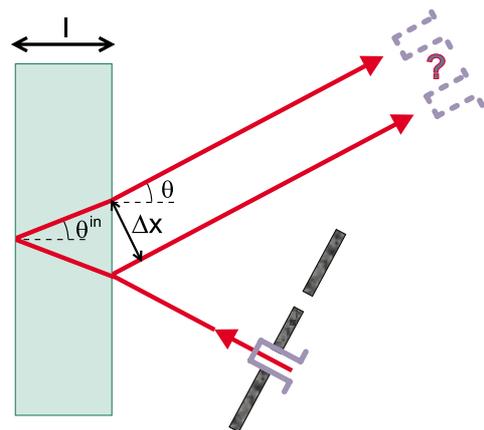


Abbildung 4.15.: Die möglichen 'Geburtsorte' des Photonenpaares im Kristall (Ansicht von oben)

²⁸Edmund Scientific Katalog, 1996 *Optics and Optical Components*

²⁹M.V. Klein, Th.E. Furtak, *Optik*, Springer Verlag, 1988

Die (zu minimierende!) Unschärfe ist bei einer 1:1 Abbildung gleich dem Versatz Δx und damit proportional zu den Austrittswinkeln der Photonen und der Dicke des Kristalles. Für eine Unterscheidung der beiden Spalten muß Δx sehr viel kleiner sein als der Spaltabstand, $\Delta x \ll d = 255 \mu\text{m}$. Will man die Effekte aufgrund des Versatzes Δx allerdings vernachlässigen können, so muß dieser kleiner sein als der durch das Beugungslimit definierte minimale Abstand: $\Delta x \ll x_R = 9.6 \mu\text{m}$.

Auf den ersten Blick bieten sich drei Möglichkeiten an:

1. dünner Kristall: man könnte x minimieren mittels eines sehr dünnen Kristalles. Allerdings erfordert dies Dicken im μm Bereich ($\Delta x = 9.6 \mu\text{m} \rightarrow l = 53.4 \mu\text{m}$). Die Wechselwirkungslänge wäre zu klein und wir müßten mit Einbußen in den Korrelationen der beiden Photonen rechnen bis hin zum völligen Verlust der Verschränkung.
2. Vergrößerung: wir könnten eine Vergrößerung wählen, sodaß die Unschärfe relativ zur Breite des abgebildeten Spaltes immer kleiner wird; dies ist jedoch unpraktisch.

3. Geometrie des Doppelspaltes!

Auf den ersten Blick ist der Versatz im Wesentlichen durch die großen Austrittswinkel der beiden Photonen (28.15°) bestimmt. Allerdings wurde hier die Geometrie des Doppelspaltes völlig außeracht gelassen! Bezieht man diese mit ein, so löst sich das Problem wie von selbst: Der Doppelspalt besteht aus zwei rechteckigen Spalten mit den Abmessungen Länge \times Breite = $5 \text{ mm} \times 75 \mu\text{m}$. Für die Beugungs- und Interferenzeffekte ist selbstverständlich nur die Spaltbreite a relevant, analoges gilt für die Abbildung. Nur jener Winkel, eingeschlossen durch die zwei Richtungen 'Ausbreitungsrichtung der Photonen' und 'Verbindung Doppelspaltmitte-Kristall', ist für eine beobachtbare Unschärfe relevant; Abbildungsungenauigkeiten parallel zu der Länge der Spalten sind völlig uninteressant.

Stellt man den Doppelspalt mit beiden Spalten *senkrecht* zur Tischplatte - wie dies in Abb. 4.15 der Fall ist, so besitzt der relevante Winkel α einen Wert in der Größenordnung des Öffnungswinkels des Photonenkegels: $28.15^\circ - \frac{(d \pm a)/2}{L} \leq \alpha_{\perp} \leq 28.15^\circ + \frac{(d \pm a)/2}{L}$, mit $L = \text{Doppelsp.-Kristall}$. Wir haben die oben beschriebenen Probleme und einen nicht zu vernachlässigenden Versatz.

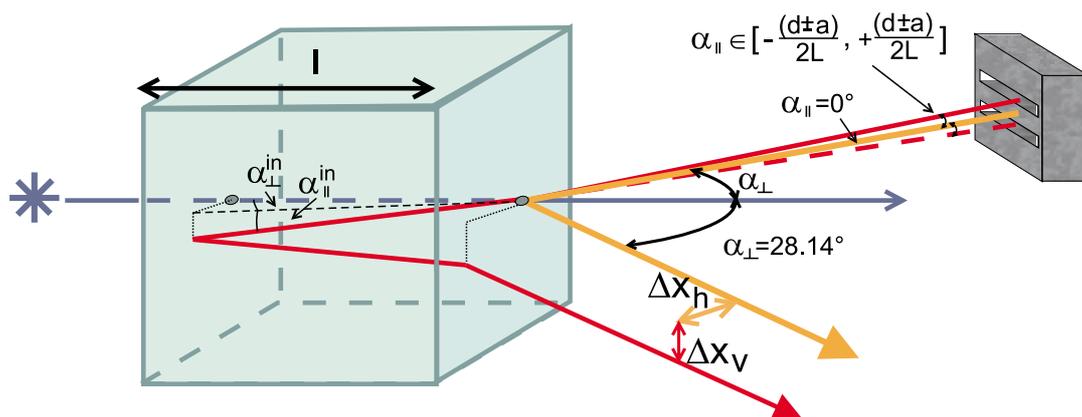


Abbildung 4.16.: Abbildungsunschärfen verursacht durch die endliche Länge des Kristalls. Je nach Orientierung des Doppelspaltes sind verschiedene Unschärfen relevant.

Werden die Spalten *parallel* zur Tischfläche ausgerichtet (drehen des Doppelspaltes in Abb. 4.15 um 90°), so berührt uns der Austrittswinkel der Photonen von 28.15° nicht mehr. Die von diesem Winkel resultierende Abbildungsunschärfe befindet sich in Richtung der Länge

des Doppelspalt, z.B. $5 \text{ mm} \pm 0.178 \text{ mm}$ für einen 1 mm dicken Kristall, und ist daher völlig nebensächlich. Der hier relevante Winkel entlang der Spaltbreite a ist aufgrund der horizontalen Austrittsrichtung der korrelierten Photonenpaare sehr klein!, er befindet sich im Intervall $0^\circ - \frac{(d \pm a)/2}{L} \leq \alpha_{\parallel} \leq 0^\circ + \frac{(d \pm a)/2}{L}$.

Die verschiedenen Winkel und der Kristall sind schematisch in Abbildung 4.16 dargestellt. Wir erhalten für den maximalen vertikalen Versatz Δx_v ,

$$\Delta x_v = 2l \tan(\alpha^{in}) \cos(\alpha), \quad (4.10)$$

Unter Verwendung des Brechungsgesetzes von Snellius ($n_{o, LiIO_3} \sin(\alpha^{in}) = \sin(\alpha)$), dem Maximalwert des externen Austrittswinkel der Photonen ($|\tan(\alpha_{max})| = \frac{(d+a)/2}{L}$) und der hier gerechtfertigten Annahme von kleinen Winkeln ($\alpha \ll \rightarrow \tan / \sin(\alpha) \cong \alpha$, $\cos(\alpha) \cong 1$; der Fehler liegt im subpromille Bereich, $\text{Err} = 3 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-4} \%$) können wir Gl. (4.10) mit bekannten Größen anschreiben: $\Delta x_v \approx \frac{l}{n_{LiIO_3}} \frac{d+a}{L}$.

Wir wählten einen Kristall mit einer Länge $l = 1 \text{ mm}$, der ordentliche Brechungsindex von LiIO_3 beträgt $n_o(702 \text{ nm}) = 1.8744$ ³⁰ und der Abstand zwischen Doppelspalt und Kristall ist in unserem Experiment $D = 40 \text{ mm}$. Mit einem Maximalwinkel $\alpha = 4.125 \text{ mrad}$ bzw. $\alpha^{in} = 2.2007 \text{ mrad}$, erhalten wir einen vertikalen Versatz von wenigen Micrometern

$$\begin{aligned} \Delta x_v &= 4.4 \mu\text{m} \\ a &= 75 \mu\text{m} \rightarrow \bar{a}_{image} = 75 \pm 2.2 \mu\text{m} \end{aligned}$$

Eine Abbildungsunschärfe dieser Größenordnung ist innerhalb des Meßfehlers, wir können ihn vernachlässigen.

4.2.7. Photographie des Meßaufbaus

Wir photographierten den Meßaufbau mit einer Digitalkamera vom Typ Olympus C800-L. Optimale Lichtverhältnisse erreichten wir mit einer indirekten Beleuchtung über Reflexion des Scheinwerferlichtes an einer weißen Deckplatte, und ohne den Blitz der Kamera zu benutzen.

Im Vordergrund des oberen Bildes von Abb. 4.17 befindet sich der Heisenberg-Detektor D1, montiert auf einem xyz-Schlitten. Die x-Richtung kann mit einem in den Schlitten eingebauten Orielmotor abgefahren werden. Man erkennt auch die blauen Wasserschläuche zur Kühlung der Diode und die Kabel für Versorgungsspannung und Meßsignal.

Innerhalb des zylinderförmigen, auf das Detektorgehäuse aufgeschraubten Aufsatzes befindet sich eine kurzbrennweitige Linse, mittels derer alles Licht vom davor montierten Einzelspalt in den Detektor abgebildet wird. Verfolgt man den Weg des Signal Photons weiter zurück hinter die Heisenberglinse, findet man im Hintergrund den LiIO_3 Kristall und die restlichen Komponenten.

Besser kann der zweite Teilarm im unteren Bild betrachtet werden; hier sehen wir einen Ausschnitt des Armes für das Idler Photon.

Der Kristall befindet sich in einem runden Gehäuse, das mit einem Heizdraht umwickelt ist. Dahinter reihen sich der Doppelspalt (mit einem aufgeklebten Quader zur Blockung des Pumplasers), eine Blende (die allerdings nur zur Justierung des HeNe-Lasers verwendet

³⁰K. Takizawa, M. Okada, S. Ieiri, Opt. Commun. 23, 279 (1977)

wird und für die Messungen vollständig geöffnet ist), eine Linse (unsere 'Hilfs'linse) und die Detektoreinheit des Doppelspalt-Detektors D2. Sie ist analog zu D1 auf einem xyz-Schlitten montiert und ist in x-Richtung mit einem Orielmotor ausgestattet.

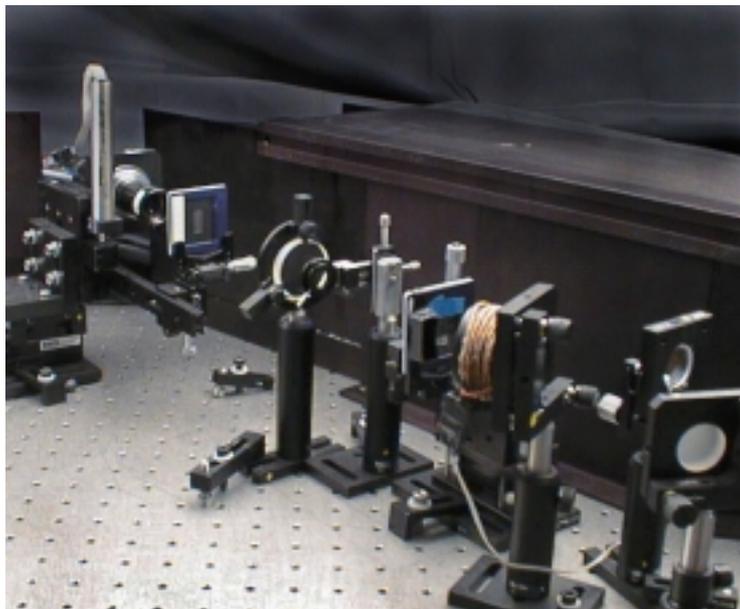
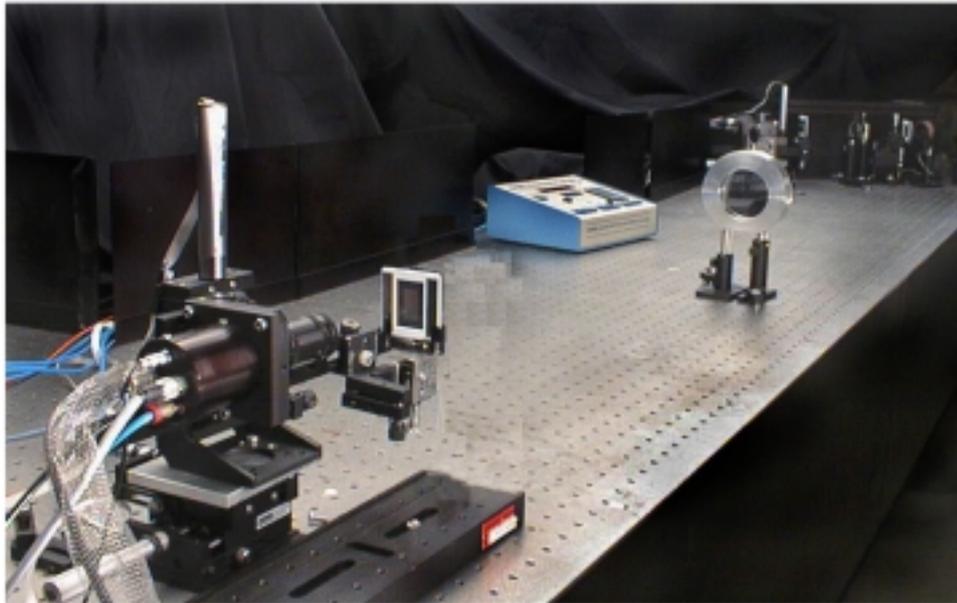


Abbildung 4.17.: Photographie des Meßaufbaus; Photo: H. Weinfurter und B. Dopfer, 1997

4.3. Die experimentellen Ergebnisse

Bei allen aufgenommenen Daten wurde von den Koinzidenzen jene Zählraten, die nicht einem korrelierten Photonenpaar entsprechen, abgezogen. Die Wahrscheinlichkeit, solche

zufälligen Koinzidenzen (K_{zuf}) zu messen, steigt proportional mit den Einzelzählraten, Z_{D1} und Z_{D2} , und der Größe des Koinzidenzfensters τ_K . Sie berechnen sich in folgender Weise

$$K_{zuf} = \frac{Z_{D1} Z_{D2} \tau_K}{\text{Meßzeit}} \quad (4.11)$$

Je nach Meßdauer und vor allem Einzelzählraten ergaben sich daraus zwischen 0 bis zu 30 zufälligen Koinzidenzen.

Zur Korrektur von Intensitätsschwankungen des Pumplasers werden die Koinzidenzen mit dem Mittelwert der Einzelzählraten multipliziert und durch den Wert am jeweiligen bestimmten Punkt dividiert:

$$K_{korrr}(x_1) = K(x_1) \frac{\text{Mittelwert}(Z_{D1}) \text{Mittelwert}(Z_{D2})}{Z_{D1}(x_1) Z_{D2}(x_1)} \quad (4.12)$$

Zusätzlich zu diesen zwei Faktoren liefern die Detektoren eine Dunkelzählrate³¹ (der Detektor zählt, obwohl er völlig abgedeckt ist und keine Photonen auf den Detektor treffen können). Der Wert dieser Zählrate ist jedoch sehr klein und lag bei etwa 700 bzw. 1000 Photonen pro Sekunde. Sein Beitrag zu zufälligen Koinzidenzen ist vernachlässigbar: mit einem Koinzidenzfenster von 2 ns erhält man für die zufälligen Koinzidenzen aufgrund der Dunkelzählraten 0.001/sek.

Eine theoretische Berechnung für das Experiment liefert uns ein analytisch nicht mehr lösbares Integral (Gl. (4.21)), man findet sie im nächsten Abschnitt (Kap. 4.4). Sie bestätigen unsere vorangehenden physikalischen Überlegungen (Doppelspalt Interferenzmuster für Impulsmessung, Beugungsmuster bzw. Abbildung für Ortsmessung) und zeichnen exakt die Meßdaten nach.

Meßeinheit und Meßpositionen

Wir beschränkten die Meßpositionen räumlich auf einen Abschnitt zwischen der Brennebene und der Abbildungsebene der Heisenberglinse

Impulsmessung	\longrightarrow	Ortsmessung
f	f + 43 cm	f + 63 cm
f + 75 cm	f + 80.5 cm	f + 83 cm
f + 84 cm	2 f	

und führten an jeder der 8 verschiedenen Position jeweils eine Meßeinheit durch, bestehend aus vier Meßdatensätzen:

1. Messung beide Spalten offen \longrightarrow Kontrast des Interferenzmusters als Maß für Impulsinformation
2. Messung nur unterer Spalt offen \longrightarrow Fehlender Überlapp der zwei Einzelspalt -
Messung nur oberer Spalt offen \longrightarrow Beugungsbilder als Maß für Weginformation
3. Messung beide Spalten zu \longrightarrow "Nullmessung"

Tabelle 4.2.: Die pro Meßeinheit aufgenommenen 4 verschiedenen Datensätze

³¹s. Diplomarbeit von G. Denifl, Universität Innsbruck (1993)

Auffallend an der Auswahl der Meßpositionen ist ihre zunehmende Dichte je mehr sich der Heisenberg-Detektor D1 der Abbildungsebene nähert. Der Grund dafür liegt in der schleppenden Abnahme des Kontrastes aufgrund der geometrischen Abhängigkeit zwischen Weginformation und Visibility. Eine detaillierte Diskussion der Beziehung zwischen diesen beiden Größen findet man in Kap. 4.5; hier wollen wir uns vorerst damit begnügen, daß die Messungen unsere Vorgabe an die Positionen als geschickt gewählt erscheinen lassen.

Einstellen des Koinzidenzfensters

Betrachtet man die Koinzidenzen am Oszilloskop, so kann man eine gaußförmige Verteilung erkennen, wobei sich etwa 85% innerhalb eines Zeitintervalls von 2 ns befinden. Mithilfe der Elektronik stellten wir das Koinzidenzfenster auf diesen Wert ein; gleichzeitig wird durch Optimierung der Breite des Fensters die Zahl der zufälligen Koinzidenzen minimiert.

Das Variieren der Distanz 'Heisenberglinse' - 'Heisenberg-Detektor D1' zur Definition der Art der Messung um insgesamt 86 cm (≈ 3 ns) kann keinesfalls vernachlässigt werden; es führt zu einer immer größeren Verzögerung des Signals vom Heisenberg-Detektor D1 relativ zu jenem des Doppelspalt-Detektors D2; das eingestellte Fenster befindet sich dann nicht mehr an optimaler Position im Maximum der Koinzidenzen und die Zählrate nimmt ab. Fährt man beispielsweise mit dem Heisenberg-Detektor um 60 cm zurück, so entspricht dies einer zusätzlichen Flugzeit der Photonen in diesem Arm um 2 ns - bei derselben Breite des Koinzidenzfensters würden wir nur noch zufällige Koinzidenzen messen.

Es wurde deswegen an jeder Meßposition auch die Position des Koinzidenzfensters neu eingestellt.

4.3.1. Heisenbergs Mikroskop: Überprüfen der Messung durch eine Testmessung

Wir realisierten Heisenbergs Gedankenexperiment: mittels des Signal Photons (γ -Quant) wird der Ort bzw. Impuls des Idler Photons (Elektron) gemessen. Die Testmessung führen wir mittels des Doppelspaltes durch zur Überprüfung des Resultats: der Detektor D2 hinter dem Doppelspalt fährt das Intensitätsmuster ab und liefert uns ein Interferenzmuster mit der Art der Messung entsprechendem Kontrast.

Der Heisenberg-Detektor D1 bleibt fix. Dies gilt in diesem Abschnitt für jede einzelne Messung.

1. Meßresultate: beide Spalten offen

Durch die Position von Detektor D1 relativ zur Heisenberglinse wird die Art der Messung zwischen den Extrema 'Impulsmessung' und 'Ortsmessung' definiert.

Wir erwarten bei Messung des Impulses einen Interferenzkontrast des 'Testbildes' hinter dem Doppelspalt bis zu einem Maximalwert von 100%. Mit Zunahme unserer Information über den Weg des Photons sollte der Kontrast absinken bis er schließlich bei Messung des genauen Ortes sein Minimum von 0% erreicht.

Zur Analyse der Daten zogen wir die zufälligen Koinzidenzen von den gemessenen Zählraten ab und korrigierten für die Intensitätsschwankungen in Heisenberg-Detektor D1 und

das Beugungsbild in Doppelspalt-Detektor D2. Die zufälligen Koinzidenzen lagen in einer Größenordnung von ca. 4 bis zu ca. 25 klicks pro Meßzeit (30-60 Sekunden). Der Wert variiert mit der Meßzeit und v.a. mit der Größe der Einzelzählraten. Ohne Abzug der zufälligen Koinzidenzen würde dies den Offset des Interferenzmusters erhöhen und damit den Kontrast verringern (bei einer Impulsmessung waren dies 1-2%)

Mit diesen Korrekturen erhalten wir die 2-Photonen Intensitätsmodulationen ohne eine unerwünschte Überlagerung des Bildes mit zufälligen Koinzidenzen oder den Beugungs- und Interferenzeffekten der Einzelphotonen.

Die konditionalen Zählraten (\equiv Koinzidenzen), d.h. die Zählraten in Doppelspalt-Detektor D2 in Abhängigkeit davon, daß 'gleichzeitig' auch Heisenberg-Detektor D1 ein Photon registriert hat, sind auf den nächsten Seiten abgebildet (siehe Abb. 4.18, 4.19, 4.20, 4.21). Sie wurden in ein Auswertungsprogram ("Origin") importiert zur Verarbeitung und Analyse. Die Fehlerbalken für die einzelnen Meßpunkte ergeben sich aus der Poissonstatistik für die Photonen zur Wurzel der Zählrate, $Err = \sqrt{\text{Zählrate}}$.

Die durchgezogenen Linien sind die theoretisch berechneten Kurven: die mathematische Berechnung (siehe Kap. 4.4, Gl.(4.25)) liefert ein Integral über zwei Phasenterme, mit Grenzen definiert durch die Transmissionsfunktion des Doppelspaltes. Durch Berücksichtigung der endlichen Größen der beiden Detektoren D1 und D2 (Aufsummieren über alle Punkte des fixen Heisenberg-Detektors und Faltung mit dem abtastenden Doppelspalt-Detektor) erhält man schließlich die theoretische Beschreibung der Koinzidenzzählraten.

Die Übereinstimmung der rechnerisch gewonnen Kurven mit den gemessenen Daten ist verblüffend. Dies umso mehr, als in die theoretischen Kurven nur die bekannten und fixierten Werte für den Doppelspalt (a, d), die Brennweite der Heisenberglinse (f_{D1}) als auch der 'Hilfs'linse vor Doppelspalt-Detektor D2 (f_{D2}), die Breite der Einzelspalten \equiv Detektorfläche (r_{D1}, r_{D2}) und die Position L des Detektors D1 hinter der Heisenberglinse ($L = 2f - \overline{\text{Linse-D1}}$) eingehen. Der *einzig*e Parameter, der an die Daten angepaßt wurde, ist die Amplitude.

Spaltbreite a.....	75 $\mu\text{m} \pm 1 \mu\text{m}$
Spaltenabstand d.....	255 $\mu\text{m} \pm 1.5 \mu\text{m}$
Brennweite der Heisenberglinse f_{D1} ...	0.86 m ± 1 cm
Brennweite der 'Hilfs'linse f_{D2}	0.141 m ± 0.5 cm
Einzelspalt Detektor D1.....	75 $\mu\text{m} \pm 1 \mu\text{m}$
Einzelspalt Detektor D2.....	35 $\mu\text{m} \pm 1 \mu\text{m}$
Position von D1: L [m].....	{0.86, 0.43, 0.23, 0.11, 0.055, 0.03, 0.02, 0} ± 1 cm

Tabelle 4.3.: Die fixen Parameter zur Berechnung der theoretischen Kurven; sie wurden alle unabhängig von den Meßdaten bestimmt

Alle Parameter in Tabelle 4.3 wurden entweder unter dem Mikroskop vermessen (die verschiedenen Spaltbreiten und -abstände) oder aber experimentell bestimmt, siehe Kap. 4.2.4. Die theoretischen Kurven beruhen alle auf den gleichen invarianten Parametern.

Bei Messung des Impulses erhielten wir einen Interferenzkontrast von 97.85%, wobei die endliche Größe von Detektor D2 (mit dem das Muster abgetastet wird) zu einer Reduktion des Kontrastes um 1.4% führt. Kleine Imperfektheiten und Meßungenauigkeiten bestimmen die restliche minimale Diskrepanz.

Wie erwartet nimmt der Kontrast bei Verfahren des Detektors D1 weg von der Brennebene Richtung Abbildungsebene immer mehr ab, allerdings zu Beginn nur sehr langsam:

beispielsweise ist er bei 1.5 f nicht etwa auf 50 % abgesunken, der Zusammenhang zwischen Interferenz und Weginformation ist nicht additiv. Wir erhalten hier immer noch einen Kontrast von 89 %! Der genaue Zusammenhang und eine detailliertere Beschreibung findet man in Kap. 4.5. Dort werden die Daten mit jenen über die Weginformation in Zusammenhang gebracht und mit Theorievorhersagen verglichen.

In einer Position des Heisenberg-Detektors D1 im Bereich ab 5,5 cm vor der Abbildungsebene (ab 1.936 f) nimmt der Kontrast dann rasch ab und beträgt für D1 3 cm vor der Abbildungsebene 9,36 %.

Um in der Abbildungsebene Licht von beiden Spalten in den Koinzidenzzählraten sehen zu können, wählen wir hier für den Heisenberg-Detektor D1 eine größere Fläche. Durch Entfernen des Aufbaus "Einzelspalt-Linse" steht uns die ganze Diode mit einer lichtempfindlichen Fläche von 500 μm zur Verfügung. Das Modulationsmuster zeigt keine Interferenzen mehr, der Kontrast ist auf 0% abgesunken.

Auffallend in den Daten ist die starke Zunahme der gezählten Koinzidenzen je mehr sich der Heisenberg-Detektor D1 der Abbildungsebene nähert. Dies, obwohl sich die Breite des Musters selbst nicht ändert. Sie ist konstant bei ca. 3 mm (ausgenommen für die Ortsmessung, hier wurde aber auch für D1 ein Detektor mit größerer Fläche verwendet).

Die Ursache liegt vielmehr auf der anderen Seite des Experimentes: wie wir im nächsten Kapitel in den Daten 4.23–4.26 erkennen werden können, nimmt die Breite des Modulationsmusters bei abtasten des Musters mit Heisenberg-Detektor D1 von der Brennebene der Linse (16 mm, volles Interferenzmuster) zur Abbildungsebene der Linse (Breite des Doppelspaltes, 330 μm) stark ab. Die gemessenen Photonen sind auf eine viel kleinere Breite konzentriert.

Die Einzelzählraten zeigten in keinem Fall Interferenzen:

Jene für Heisenberg-Detektor D1 unterliegen minimalen Intensitätsschwankungen verursacht durch den Pumplaser. Die Einzelzählraten in Doppelspalt-Detektor D2 zeigen zwei inkohärent überlagerte Beugungsbilder, der Abstand zwischen Quelle und Doppelspalt ist zu klein um Interferenz sehen zu können.

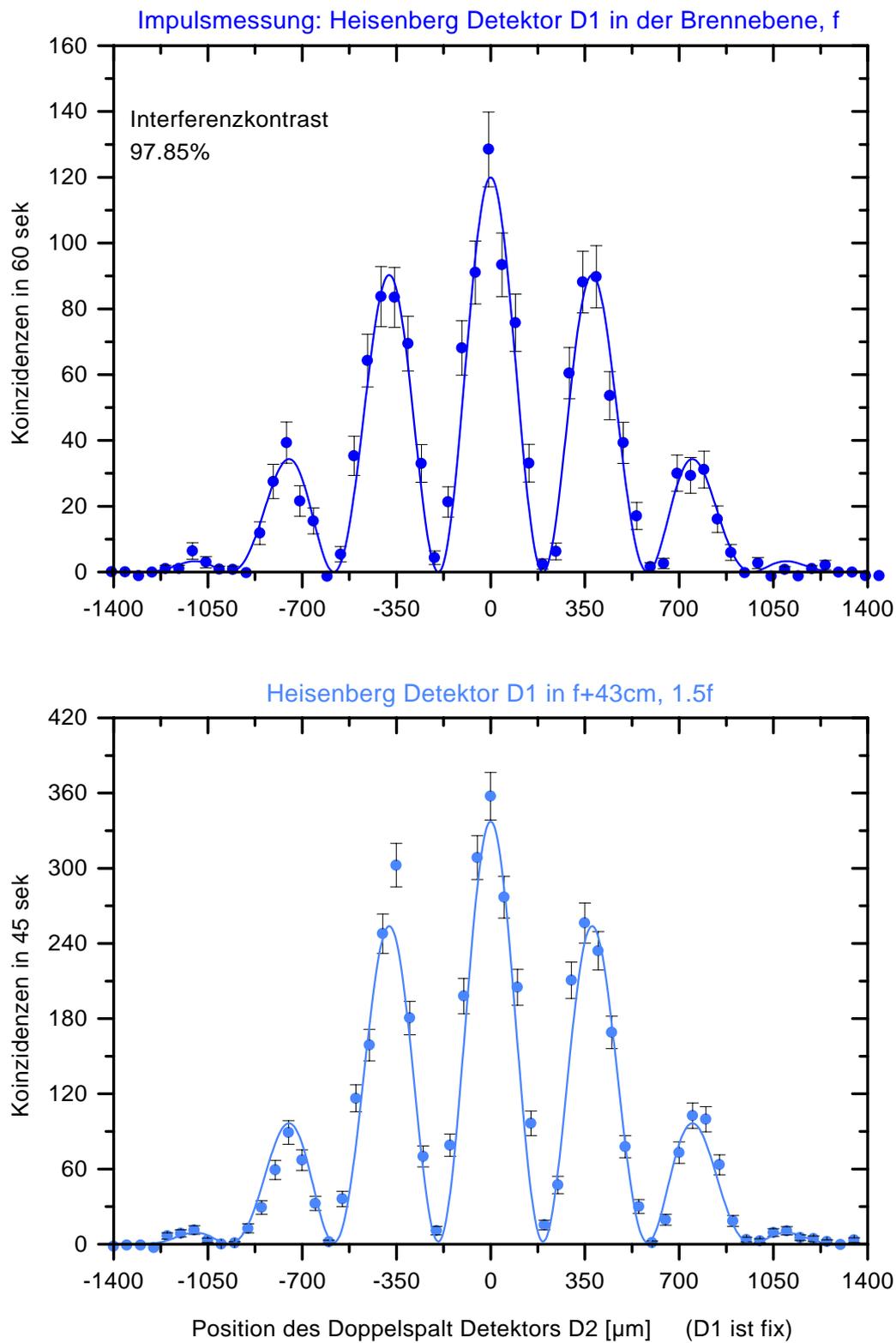


Abbildung 4.18.: Die Daten zeigen die Koinzidenzzählraten mit einem hohen Kontrast zw. 90% und 97% im Bereich f ('perfekte' Impulsmessung) und $1.5f$; der Doppelspalt-Detektor tastet das Intensitätsmuster ab, der Heisenberg-Detektor D1 bleibt während der Messung fix, bestimmt aber durch seine Position hinter der Heisenberglinse (f , $1.5f$) die Art der Messung.

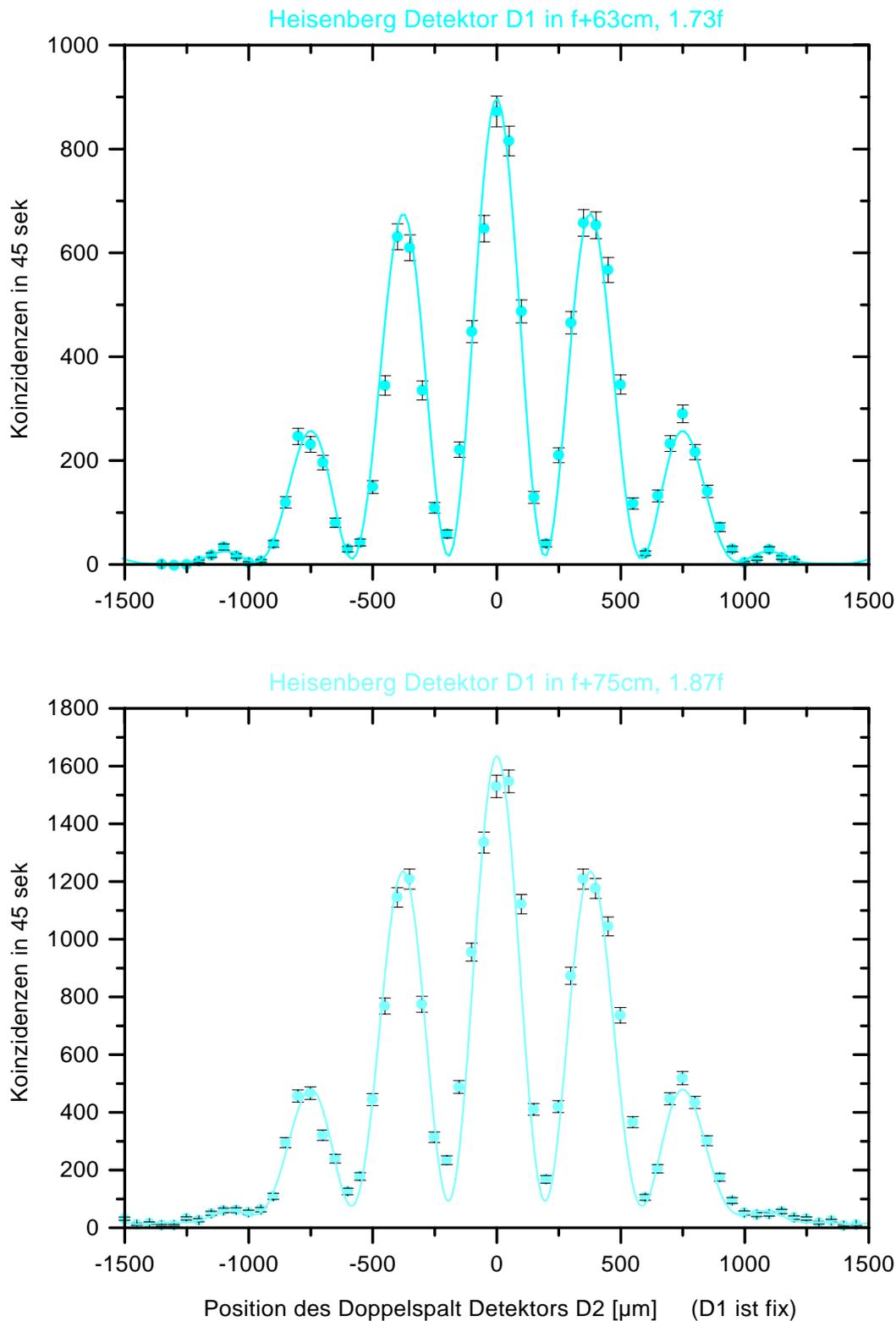


Abbildung 4.19.: Die Daten zeigen die Koinzidenzzählraten im Bereich 1.73f und 1.87f (Position des Heisenberg-Detektors); der Interferenzkontrast beginnt abzunehmen, ist aber immer noch verblüffend hoch (ca. 70%). Der Doppelspalt-Detektor tastet das Intensitätsmuster ab, Heisenberg-Detektor D1 bleibt während der Messung fix.

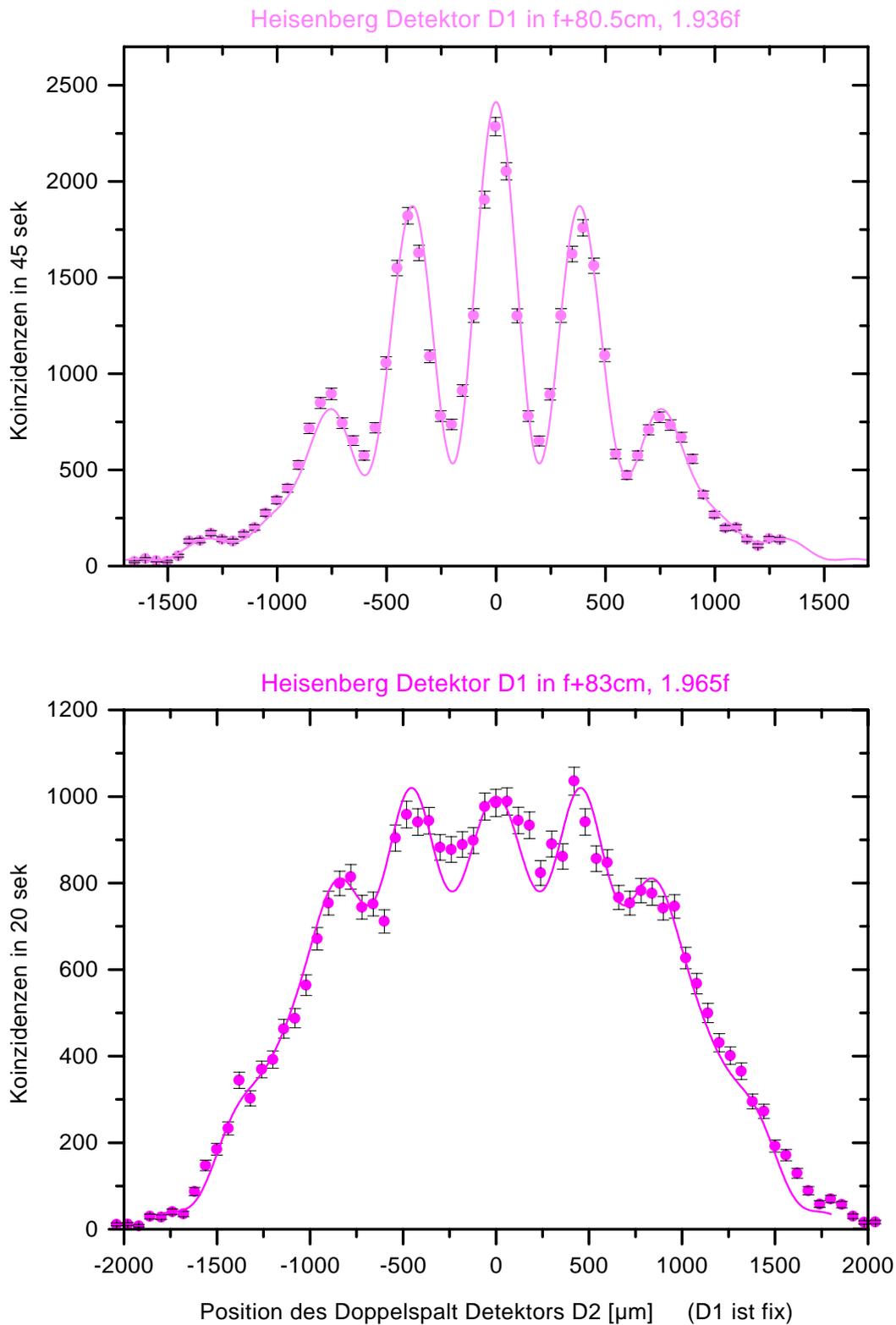


Abbildung 4.20.: Die Daten zeigen die Koinzidenzzählraten im Bereich 1.936f und 1.965f (Position des Heisenberg-Detektors); erst in diesem hinteren Bereich ($f=86$ cm; D1 befindet sich hier 5.5 cm bzw. 3 cm vor der Abbildungsebene!) sinkt der Kontrast nun rasch ab. Doppelspalt-Detektor D2 tastet das Intensitätsmuster ab, Heisenberg-Detektor D1 bleibt während der Messung fix.

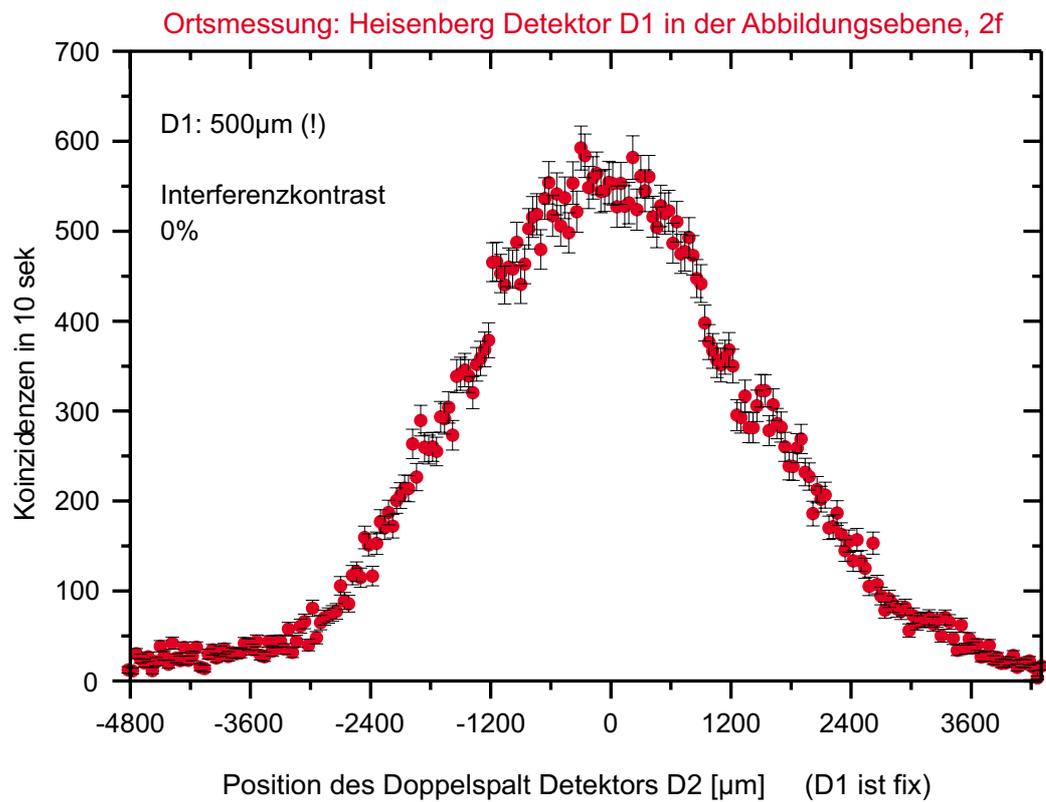


Abbildung 4.21.: Die Daten zeigen die Koinzidenzzählraten bei einer exakten Ortsmessung (2f). Es können keine Interferenzen mehr beobachtet werden, der Kontrast ist auf 0 abgesunken. Information über den Weg des Teilchens, den es durch den Doppelspalt genommen hat, zerstört jede Interferenz.

2. Nullmessungen

Wir blockten jedes Licht, das von den beiden Spalten des Doppelspaltes kommen könnte, ab und führten damit eine Nullmessung durch. Es sollten keine Koinzidenzen zwischen den beiden Photonen eines Paares gemessen werden können, trotzdem waren die Mittelwerte der gezählten Raten nicht gleich Null!

Betrachtet man allerdings die Differenz der Mittelwerte der Koinzidenzen und der zufälligen Koinzidenzen (berechnet mit einem Koinzidenzfenster $\tau_K = 2 \text{ ns}$), z.B. für die Positionen f und $2f$, so kann man leicht erkennen, daß die Zählraten, die durch Koinzidenzmessung eines korrelierten Photonenpaares ausgelöst werden, doch auf Null abgesunken sind.

	f	2f
Mittelwert Koinzidenzen	0.73333 [pro 60 sek]	3.74667 [pro 10 sek]
Standardabweichung	0.82768	1.86789
Mittelwert 'Koinz. - zufällige Koinz.'	-0.19336 [pro 60 sek]	-1.12067 [pro 10 sek]
Standardabweichung	0.82641	1.86846

Tabelle 4.4.: Die Mittelwerte sowohl der gemessenen Koinzidenzen als auch der Zählrate bei Abzug der zufälligen Koinzidenzen für Impulsmessung und Ortsmessung

Das Licht, das durch die Heisenberglinse auf den Heisenberg-Detektor fällt, ist jedoch *nicht* abgeblockt!; dies erklärt die verschieden hohen Zählraten in den Datensätzen der 8 Positionen in Abb. 4.22).

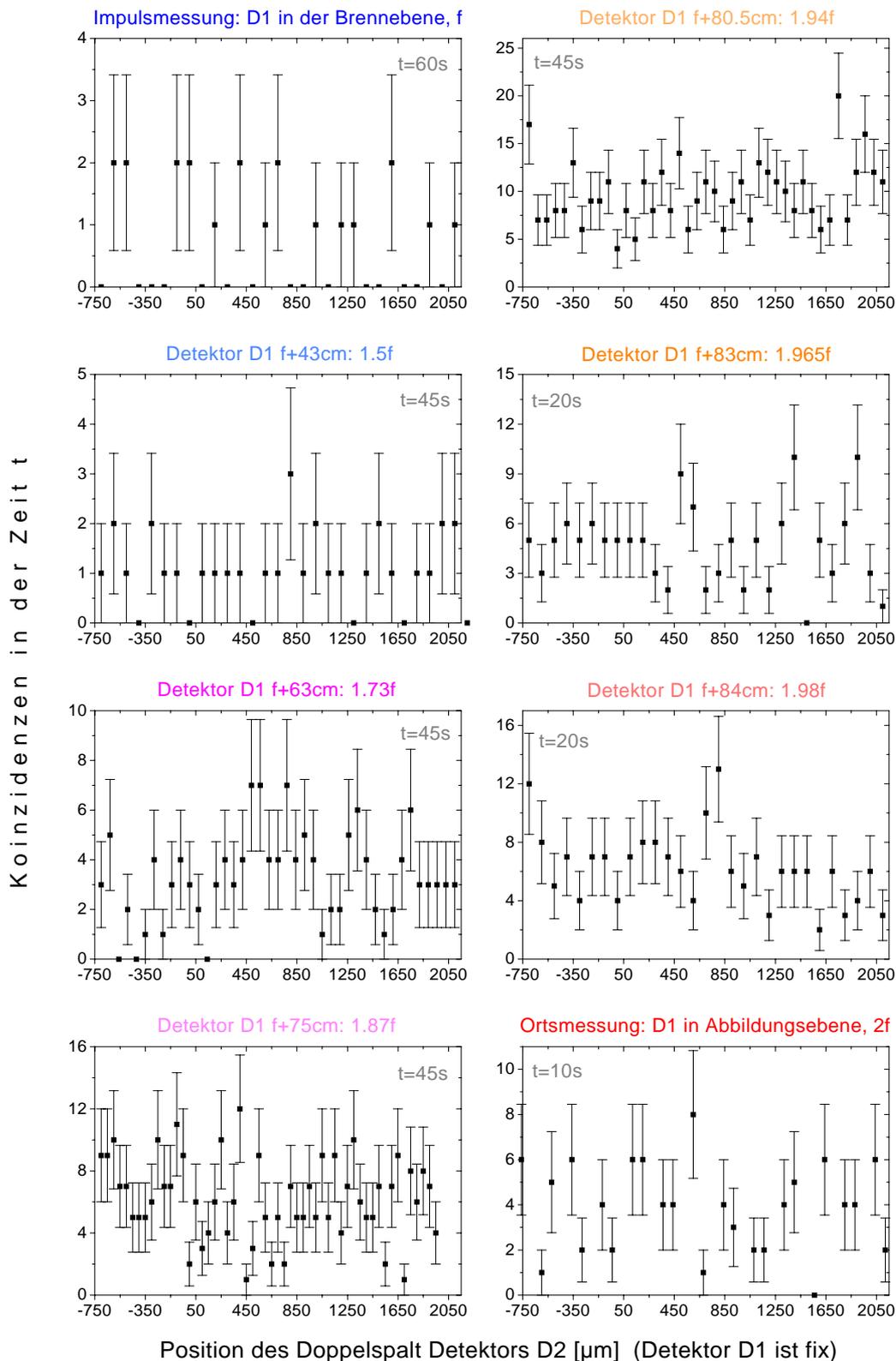


Abbildung 4.22.: Nullmessung - Beide Spalten des Doppelspaltes sind vollständig abgedeckt: die Koinzidenzzählrate sinkt ab, es sind nur noch zufällige Koinzidenzen zu beobachten. Die unterschiedlichen Intensitäten sind auf die unterschiedlichen Einzelzählraten in Heisenberg-Detektor D1 zurückzuführen

4.3.2. Nichtlokale Interferenz- und Abbildungsmuster

Nichtlokale Effekte, die nur im Zusammenhang mit einer nichtklassischen Quelle auftreten können, wurden schon in den verschiedensten Interferenzexperimenten^{32,33} gezeigt, in Tests zur Bell'schen Ungleichung^{34,35} oder in Teleportationsexperimenten³⁶ verwendet.

Diese Idee wollen wir auch hier weiterverfolgen: lassen wir **Detektor D2 fix** und **fahren Detektor D1**, auch wenn - oder gerade weil - sich auf dieser Seite des Aufbaus *kein* Doppelspalt befindet, werden wir trotzdem Beugungs- und Interferenzeffekte bzw. ein Abbildungsmuster³⁷ beobachten können!

1. Meßresultate: beide Spalten offen

An allen 8 Positionen wurden die Messungen durchgeführt, die aufgenommenen Daten korrigierten wir für zufällige Koinzidenzen und für Effekte der Einzelzählraten.

Die zufälligen Koinzidenzen lagen wieder in einer Größenordnung von ca. 4 bis zu ca. 25 Klicks pro Meßzeit (30-60 Sekunden). Auch hier würde ohne Abzug der zufälligen Koinzidenzen der Offset des Interferenzmusters ungleich Null sein (im Idealfall!) und damit den Kontrast verringern (bei einer Impulsmessung waren dies 1-2%).

In den Abb. 4.23, 4.24, 4.25, 4.26 sind diese gemeinsam mit einer theoretischen Kurve abgebildet (schwarze Linie), deren Berechnung man in Kap. 4.4 findet.

Für die theoretische Kurve wurden *nur die bekannten, fixen Werte* herangezogen!: die Abmessungen des Doppelspalt, a und d , die Größe der Detektoren, r_{D1} und r_{D2} , die Brennweiten der Heisenberglinse, f_{D1} , und der 'Hilfs'linse, f_{D2} , und die Position des Heisenberg-Detektors definiert durch die Distanz L . Der *einzig*e Parameter, der an die Daten angepaßt wurde, ist die Amplitude der Kurve (und auch hier wird die theoretisch ideale Annahme verwendet, daß beide Spalten mit derselben Lichtstärke beleuchtet wurden).

L	Position von Detektor D1: $L = 2f - \overline{\text{Linse-D1}}$
Offset . . .	additiver Faktor
Amp 1 . . .	Amplitude für die Ausleuchtung von Spalt 1
Amp 2 . . .	Amplitude für die Ausleuchtung von Spalt 2
φ	relative Phase des Lichtes beider Spalten

Tabelle 4.5.: Die an die Daten anzupassenden Parameter

Zusätzlich ermittelten wir mit der theoretischen Funktion als Ausgangspunkt eine Anpassung an unsere Daten. Im Gegensatz zu der theoretischen Kurve, die außer einer allgemeinen

³²J.G. Rarity, P.R. Tapster, *Two-color Photons and Nonlocality in Fourth-order Interference*, Phys. Rev. A 41, 5139 (1989)

³³K. Mattle, M. Michler, H. Weinfurter, A. Zeilinger, *Nonclassical Statistics at multipoint Beamsplitters*, Appl. Phys. B60, 111 (1995)

³⁴A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, *Experimental Test of Bell's Inequalities using Time-Varying Analyzers*, Phys. Rev. Lett. 49, 1804 (1982)

³⁵G. Weihs, H. Weinfurter, A. Zeilinger, *Towards a Bell-Experiment with Independent Observers*, Experimental Metaphysics, R.S. Cohen et. al. (Eds.), 271 (1997)

³⁶D. Bouwmeester, J.W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger, *Experimental Quantum Teleportation*, Nature 390, 575 (1997)

³⁷T.B. Pittman, Y.H. Shih, D.V. Strekalov, A.V. Sergienko, *Optical Imaging by means of Two-Photon Quantum Entanglement*

Amplitude nur fixe Werte zuließ, wurden hier fünf Parameter (s. Tabelle (4.6)) variiert um eine bestmögliche Übereinstimmung mit den Daten zu erhalten.

Das Programm mußte aufgrund der Komplexität mehrerer, ineinander verschachtelter Integrale (Ausgangspunkt ist unser theoretisch hergeleitetes, doppeltes Integral!) in Matlab geschrieben werden. Die Anpassungsroutine ist definiert über die Funktion "leastsquare" und berechnet die optimalen Werte für die zu variierenden Parameter durch Minimierung des Fehlerquadrates (die Summe der Quadrate der Differenz zwischen gemessenen Datenpunkt und berechnetem Wert soll ein Minimum sein: $\sum(y_i - f(x_i))^2 \rightarrow \text{Min.}$).

Wir stellten allerdings fest, daß die angepaßten Kurven nur minimal die gemessenen Daten besser beschreiben als unsere fixen Theoriekurven! Beispielsweise findet man im Vergleich der Summe der Fehlerquadrate, χ^2 , im Falle der Impulsmessung (Heisenberg-Detektor D1 steht in der Brennebene der Heisenberglinse) für die beiden Kurven einen minimalen Unterschied von $\frac{\chi^2(\text{Theorie}) - \chi^2(\text{angepaßte Kurve})}{\chi^2(\text{Theorie})} \approx 0.4$.

Die Daten, gemessen für eine Position des Heisenberg-Detektors an 1.965 f (s. Abb. 4.25), bilden hier die einzige Ausnahme: eine verschieden starke Ausleuchtung der Spalten führte zu einer leichten Asymmetrie in den Datenpunkten, was natürlich nur in einer Funktion berücksichtigt werden kann, in der die beiden Amplituden unabhängig voneinander an die Daten angepaßt werden können.

Der Interferenzkontrast berechnet sich im allgemeinen aus dem Verhältnis der Differenz und der Summe von maximaler zu minimaler Intensität, $\text{Vis} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$. Dies ist relativ einfach zu bewerkstelligen, wenn man einen Ausschnitt des Interferenzmusters betrachten kann, in dem die Einhüllende (die den Einfluß der endlichen Breite der zwei Spalten auf das Modulationsmuster beschreibt) noch keine große Rolle spielt.

In unseren Daten ist dies nicht der Fall, die Einhüllende muß mitberücksichtigt werden und wir definieren daher in analoger Weise zum üblichen Verfahren, $\text{Vis} = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}$ (s. Kap. 4.4.2, Gl. (4.28)). Anstatt der Intensitäten werden die Flächen der Einhüllenden des Interferenzmusters ($\equiv I_{max}$) und jene Flächen, die durch die Minima definiert werden ($\equiv I_{min}$), herangezogen.

Bei Messung des Impulses erhielten wir einen Interferenzkontrast von $97.22\% \pm 1.7\%$. Die Diskrepanz zum Idealwert von 100% kann einerseits zurückgeführt werden auf die endliche Größe des abtastenden Detektors D1: die Faltung des Interferenzbildes mit einer Rechteckfunktion von der Breite $2r_{D1}$ führt zu einer Reduktion um 0.2%.

Auch Detektor D2 ist nicht punktförmig, was eine zusätzlichen Abnahme des Kontrastes um den allerdings ebenfalls geringen Wert von 0.8% liefert: es sind mehr als nur eine einzige Impulsrichtung erlaubt. Das Interferenzbild ergibt sich aus der Überlagerung der Modulationsmuster mehrerer ebener Wellen, die unter verschiedenen Winkeln auf den Doppelspalt treffen, $\Delta\alpha = \frac{r_{D2}}{f_{D2}} = 0.12 \text{ mrad}$.

Insgesamt erhalten wir einen Kontrastverlust aus der Summe der beiden unabhängigen obigen Verluste zu etwa 1%; unter Berücksichtigung des obigen Meßfehlers des Interferenzkontrastes von $\pm 1.7\%$ und der Tatsache, daß kleine Imperfekte in der Justierung sich nie vermeiden lassen, ergeben sich wieder die theoretischen 100%.

Je mehr wir uns der Abbildungsebene nähern, desto mehr nimmt der Interferenzkontrast ab, wie wir das schon in der umgekehrten Situation bei Abtasten der Modulationen mittels des Doppelspalt-Detektors D2 gesehen haben.

Zusätzlich können wir noch einen zweiten Effekt beobachten: das Interferenzbild in Abtastrichtung x_{D1} (entlang der Intensitätsmodulationen) wird immer schmaler, bis sich in der

Abbildungsebene das Bild des Doppelspalt es herauskristallisiert (überlagert durch eine Faltung mit der endlichen Größe von Heisenberg-Detektor D1):

$$\begin{array}{ccc}
 f & & 2f \\
 \text{Interferenzbild mit } 16 \text{ mm Breite (bestimmt durch die Einhüllende, } \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda f}\right) & \rightarrow & \text{Abbildung des Doppelspalt es mit einer Breite } d + a = 330 \mu\text{m}
 \end{array}$$

Die Ursache für die Reduktion von Kontrast und Interferenzbreite liegt in der Abnahme der Überlappfläche des Lichtes von den beiden Spalten: in der Brennebene überlappen die zwei Einzelspalt-Beugungsbilder im Idealfall perfekt. Wir beobachten innerhalb der Überlagerungsfläche das Interferenzmuster mit einem Kontrast von 100% und einer Einhüllenden gleich dem Beugungsmuster. Für Positionen des Heisenberg-Detektors in Richtung der Abbildungsebene nimmt diese Fläche des Überlapps immer mehr ab; der Kontrast sinkt und die Breite der Einhüllenden wird kleiner. Beugungseffekte müssen abbildenden Elementen weichen.

Dieses Verhalten läßt sich präzise in den Messungen des nächsten Abschnittes durch jeweiliges Abdecken eines der beiden Spalten nachweisen und beobachten.

Bei einer Ortsmessung können wir die Abbildung des Doppelspalt es beobachten. Die dreieckige Form in Abb. 4.26 resultiert aus der Faltung zweier gleich großer Rechteckfunktionen ($a = 75 \mu\text{m}$, $2 r_{D1} = 75 \mu\text{m}$). Aus einer Kurve zur Anpassung an die gemessenen Daten ergibt sich eine Spaltbreite $a = 73.204 \pm 2.4 \mu\text{m}$ und ein Spaltenabstand $d = 253.039 \pm 3.12 \mu\text{m}$. Verglichen mit den Werten, die wir mithilfe eines Mikroskops ermitteln konnten, liegen die gemessene Spaltbreite und der Spaltenabstand innerhalb des beugungslimitierten Abbildungsfehlers, den wir in Kap. 4.2.6 berechnet haben zu $\Delta x = \pm 4.8 \mu\text{m}$.

In den Einzelzählraten zeigt sich hier selbstverständlich bei keiner Messung weder Beugung noch Interferenz. Die Zählraten unterliegen nur kleinen Intensitätsschwankungen des Pumplasers.

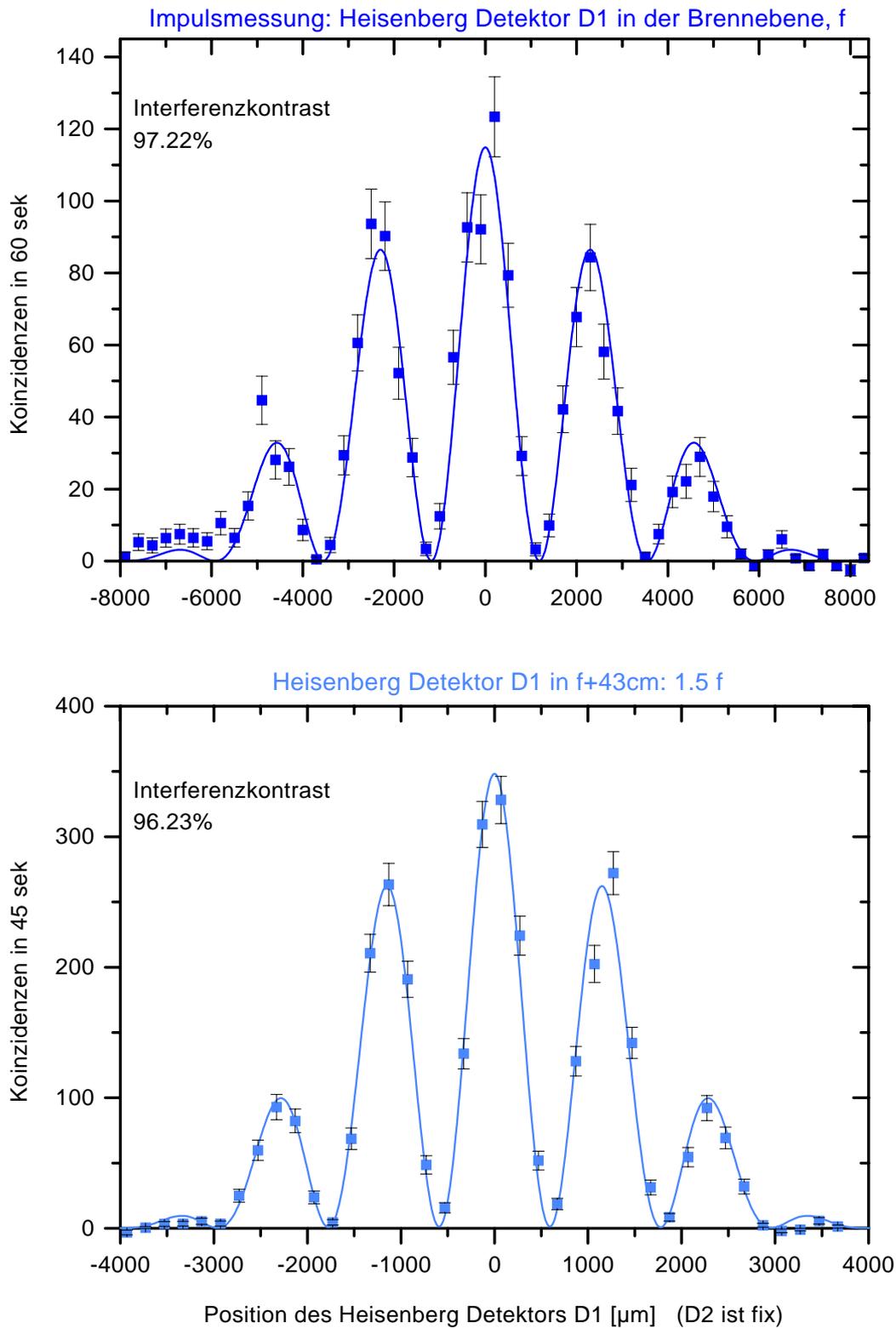


Abbildung 4.23.: Die Daten für nichtlokale Beugung/Interferenz im Bereich $f \rightarrow 1.5 f$ (Position des Heisenberg-Detektors); wir sehen Interferenzbilder mit hohem Kontrast (89% und 97%) und dies, obwohl der hinter dem Doppelspalt platzierte Detektor D2 fix bleibt und Detektor D1 das Muster abfährt!

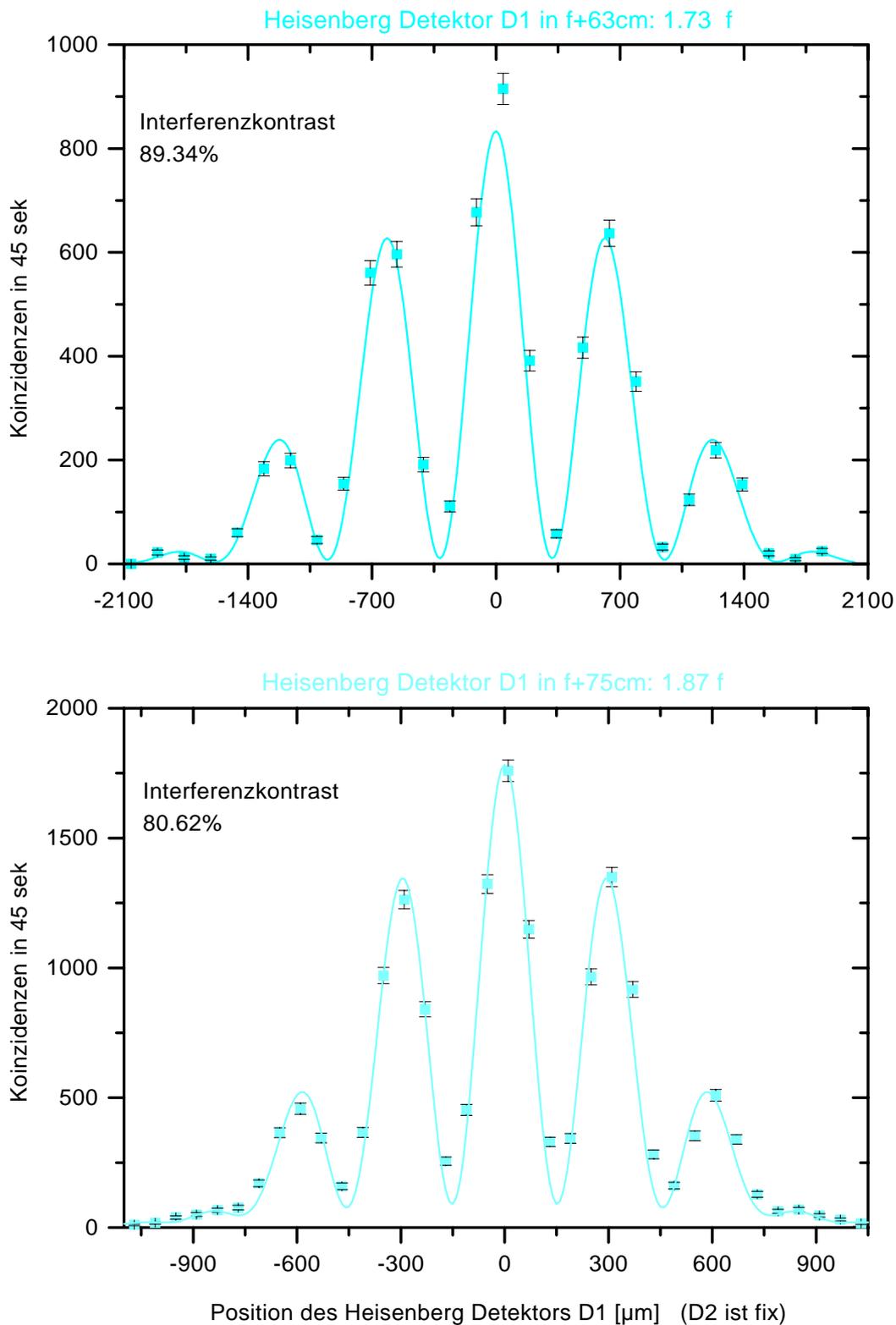


Abbildung 4.24.: Die Daten für nichtlokale Beugung/Interferenz im Bereich $1.73f \rightarrow 1.87f$ (Position des Heisenberg-Detektors); der Interferenzkontrast wird langsam etwas geringer (ist aber immer noch erstaunlich hoch, analog zu den Messungen in Kap. 4.3.1), gleichzeitig verkleinert sich die Breite des Bildes: abbildende Elemente nehmen langsam zu.

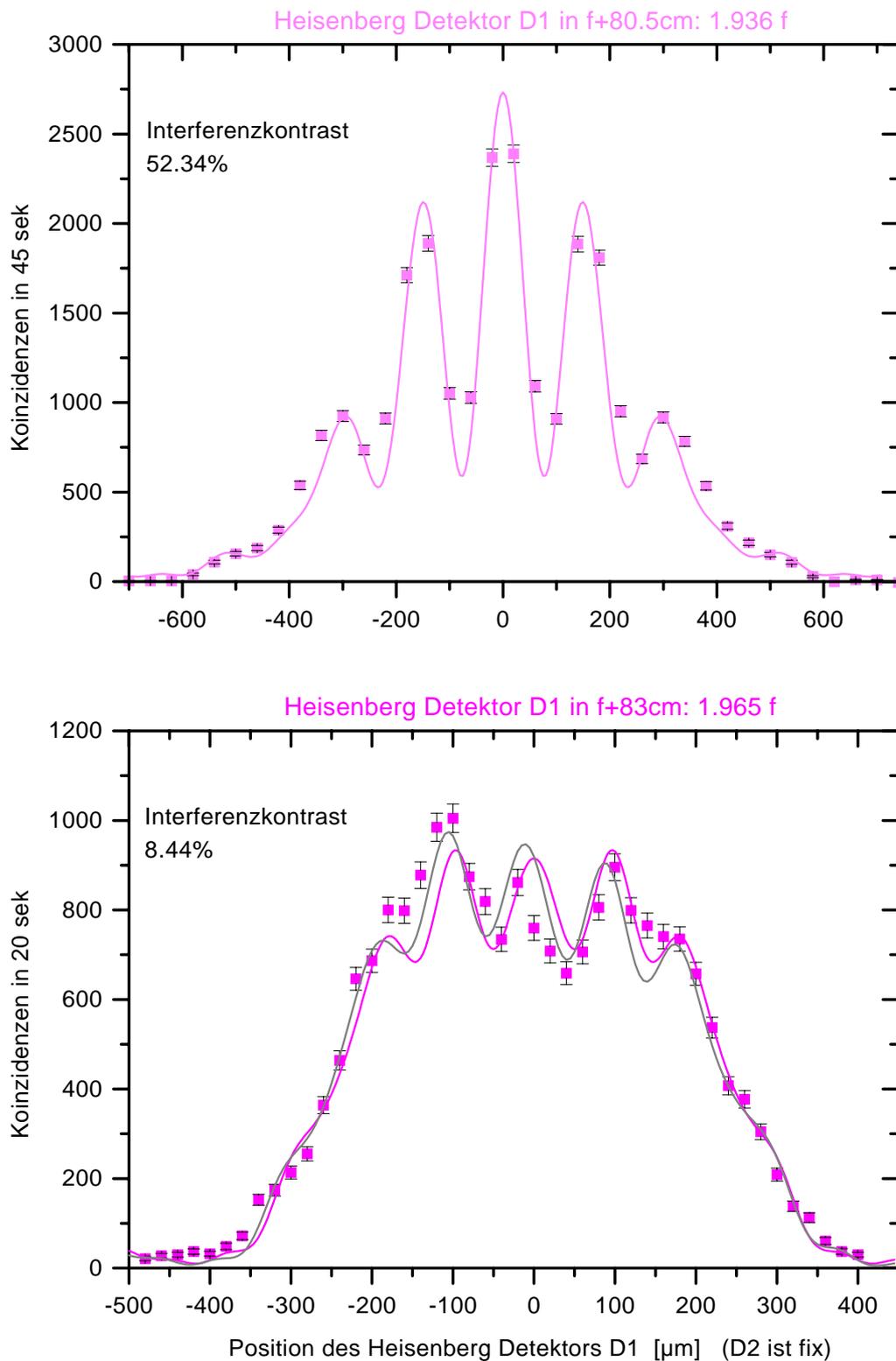


Abbildung 4.25.: Die Daten für nichtlokale Beugung/Interferenz im Bereich $1.936f \rightarrow 1.965f$ (Position des Heisenberg-Detektors); für die Datenpunkte bei $1.965f$ war die Ausleuchtung der beiden Spalten nicht symmetrisch, dementsprechend ist auch die Anpassungskurve (im Gegensatz zur Theorie) unsymmetrisch. Heisenberg-Detektor D1 führt das Bild ab, D2 ist fix.

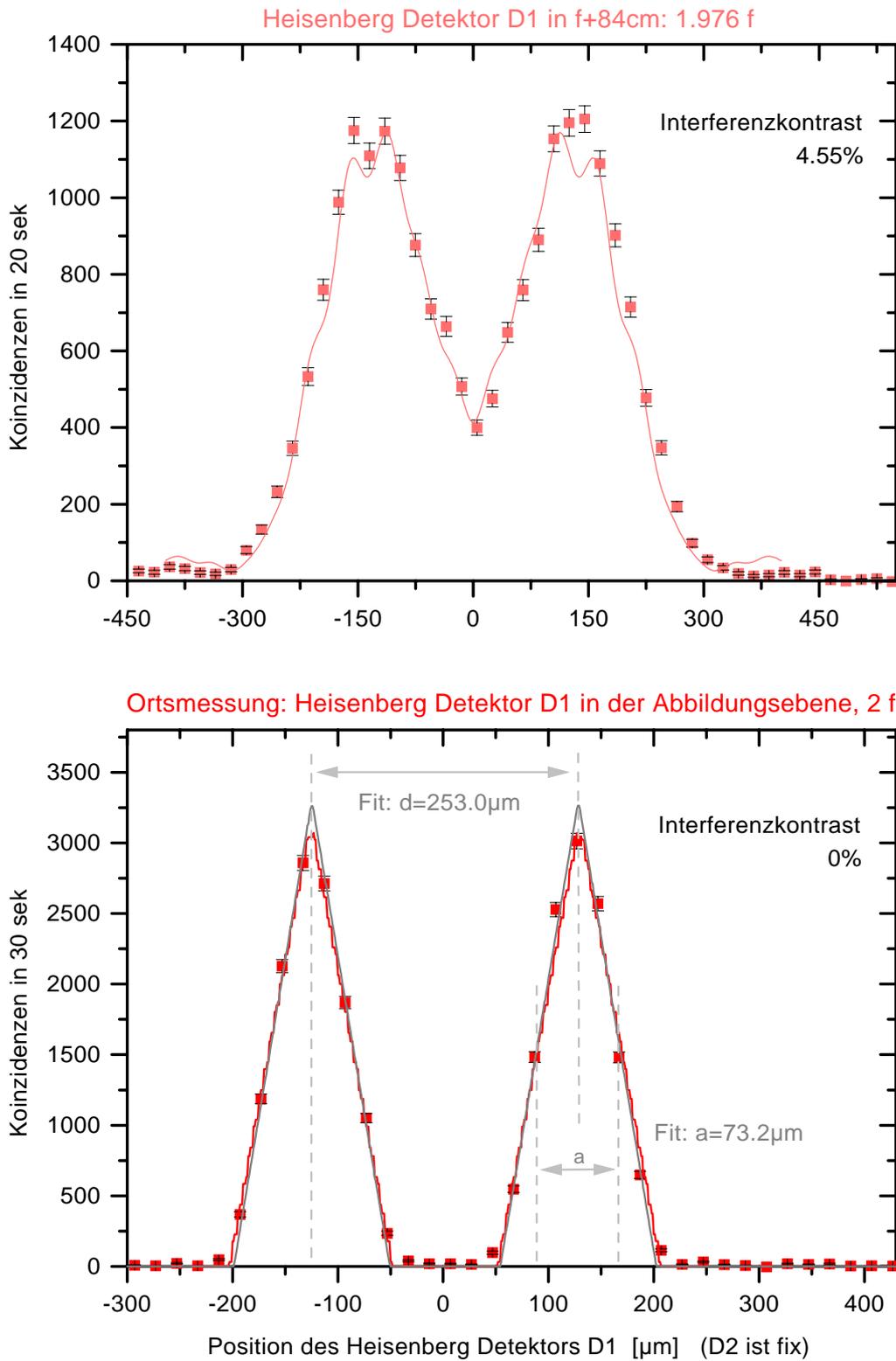


Abbildung 4.26.: Die Daten für nichtlokale Beugung/Interferenz im Bereich $1.976f \rightarrow 2f$ (Position des Heisenberg-Detektors); bei exakter Ortsmessung können wir die Abbildung des Doppelspalt beobachtet (gefaltet mit der Größe des abtastenden Detektors). Heisenberg-Detektor D1 fährt das Bild ab, D2 ist fix.

2. Meßresultate: jeweils ein Spalt abgedeckt

Jeweils ein Spalt wird mithilfe eines Rasiermessers (optimal aufgrund seiner scharfen Kante) abgeblockt. Wir nahmen die Beugungsbilder / Abbildung an allen 8 Positionen von Heisenberg-Detektor D1 zwischen der Brennebene und der Abbildungsebene der Linse auf. Wir können das vorhin kurz angesprochene Verhalten beobachten:

In der Brennebene gehorchen die beiden getrennt gemessenen Beugungsbilder von den zwei Spalten einer sinc^2 -Funktion; die Bilder überlagern zu 89.3% der Gesamtfläche. Die Diskrepanz zum optimalen Überlapp von 100% ist hauptsächlich auf eine imperfekte Justierung zurückzuführen und, wie man in den Daten erkennen kann (s. Abb. 4.27), auf einen Einbruch der Daten für den oberen (Daten weiter rechts) Spalt. Das Beugungsbild ist zu schmal verglichen mit der Theorie und auch mit dem Beugungsbild des unteren Spaltes.

Je weiter wir mit Detektor D1 nach hinten fahren, desto schmaler werden die Kurven von den beiden Spalten. Die Beugung wird durch abbildenden Elemente überlagert bis das Einzelspalt-Beugungsbild in der Brennebene (mit einer Breite von 16 mm) auf ein rechteckförmiges Bild des einzelnen Spaltes in der Abbildungsebene geschrumpft ist.

Die relative Position der Maxima der beiden Kurven zueinander ändert sich jedoch nicht! Allerdings nimmt andererseits, bzw. genau deswegen, die Überlappfläche, die sowohl den Kontrast als auch die Breite des Interferenzbildes definiert, ständig ab.

In den Abbildungen 4.27, 4.28, 4.29, 4.30 sind die gemessenen Daten zu sehen. Die schwarzen Kurven sind die theoretischen, berechnet nur mit den fixen vorgegeben Werten analog zu den vorigen Theoriekurven (fixe Werte für Spaltgröße, Brennweiten der Linsen, Detektorflächen, Position des Detektors D1 hinter der Heisenberglinse) und mit einer variablen Amplitude. Die farbigen Kurven sind die an die Daten angepaßten Kurven der theoretischen Funktion als Grundfunktion. Die zu variierenden Parameter sind:

L Position von Detektor D1: $L = 2 f - \overline{\text{Linse-D1}}$
 Offset additiver Faktor
 Amp 1,2 . . . Amplitude für die Ausleuchtung von Spalt 1,2

Tabelle 4.6.: Die an die Daten anzupassenden Parameter

Aus der Anpassungskurve in der Abbildungsebene ergibt sich die Spaltbreite a des Doppelspaltes zu $73.9 \pm 2.1 \mu\text{m}$.

Die Messungen können dazu verwendet werden, die Weginformation zu extrahieren. Die Gegenüberstellung der beiden komplementären Größen Interferenzkontrast (Impulsinformation) und Weg (Orts-)information findet man in Kap. 4.5.

3. Nullmessungen

Führen wir Messungen durch mit beiden Spalten des Doppelspaltes geblockt, ergibt sich, verglichen mit den Messungen zum Heisenbergmikroskop, nichts wesentlich Neues. In Abbildung 4.31 sind die gemessenen Koinzidenzraten ersichtlich; zieht man die zufälligen Koinzidenzen ab, ergeben sich wieder die zu erwartenden Mittelwerte von Null.

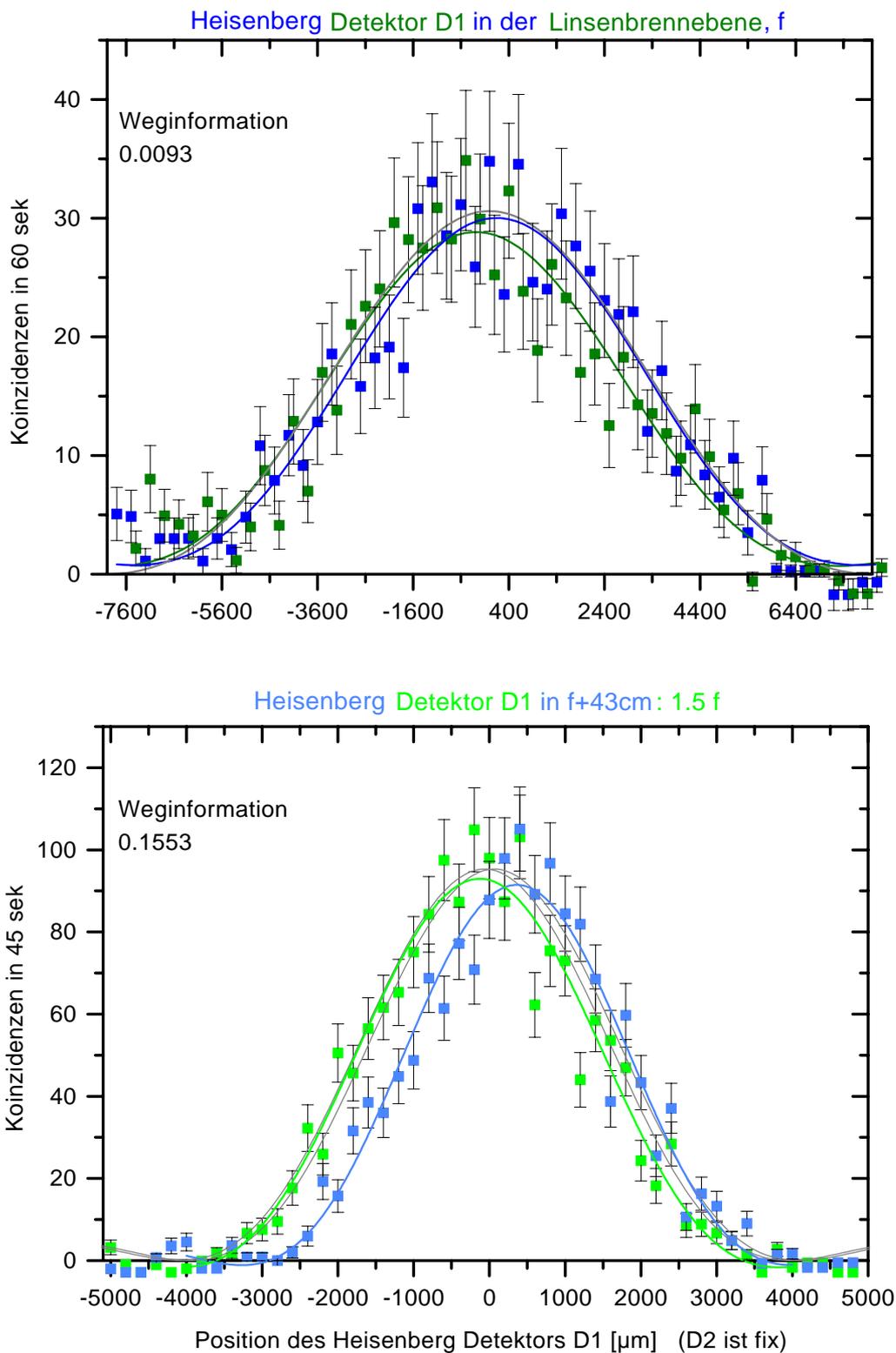


Abbildung 4.27.: Beugungsbilder für jeweils einen Spalt im Bereich $f \rightarrow 1.5f$ (Position des Heisenberg-Detektors D1); für f sollten die Bilder noch exakt überlagern, aufgrund eines Intensitätseinbruchs der rechten Kurve, der jedoch innerhalb des Meßfehlers liegt, ist der Überlapp vermindert. Die Meßzeiten waren zu kurz für ein besseres Ergebnis.

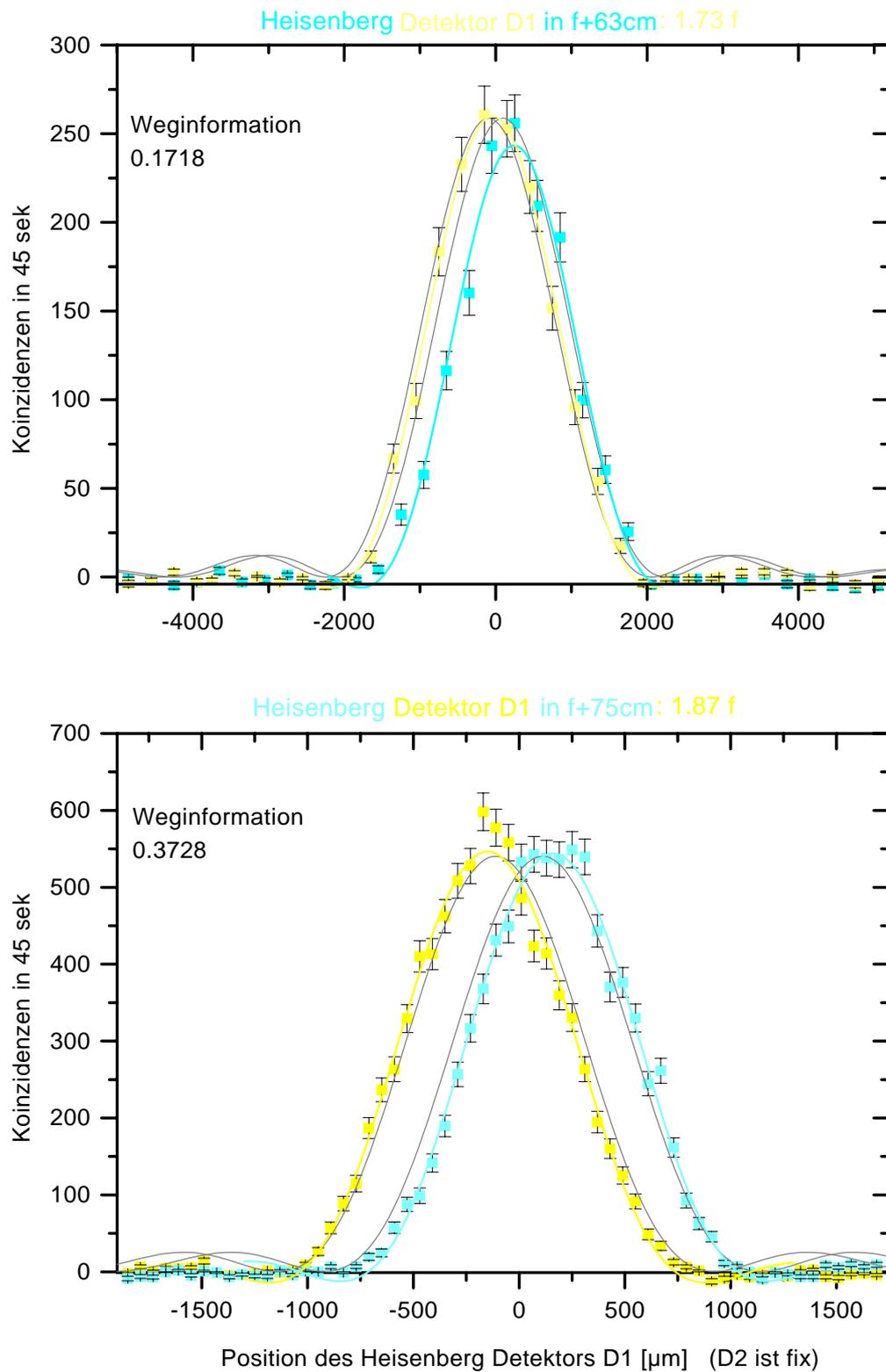


Abbildung 4.28.: Beugungsbilder für jeweils einen Spalt: $1.73f \rightarrow 1.87f$ (Position des Heisenberg-Detektors D1); die Beugungsbilder werden nur sehr langsam schmaler, der Überlapp, in dem Interferenz stattfinden kann, ist immer noch verblüffend groß. Detektor D1 fährt das Intensitätsmuster ab, D2 ist fix.

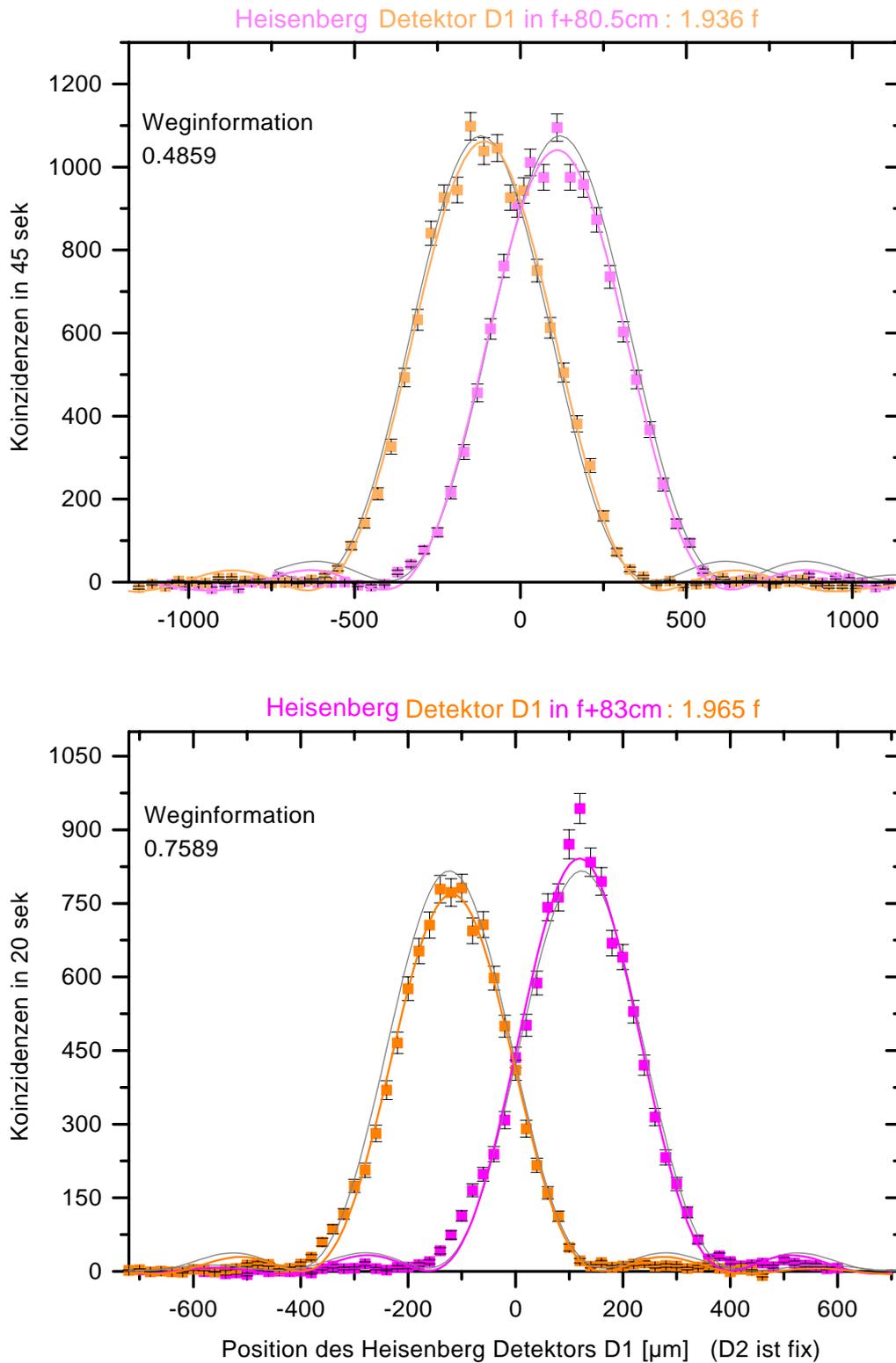


Abbildung 4.29.: Beugungsbilder für jeweils einen Spalt: $1.936f \rightarrow 1.965f$ (Position des Heisenberg-Detektors D1); in den letzten Zentimetern vor der Abbildungsebene wird der Überlapp des Lichtes von den beiden Spalten nun sehr schnell kleiner. Detektor D1 fährt das Intensitätsmuster ab, D2 ist fix.

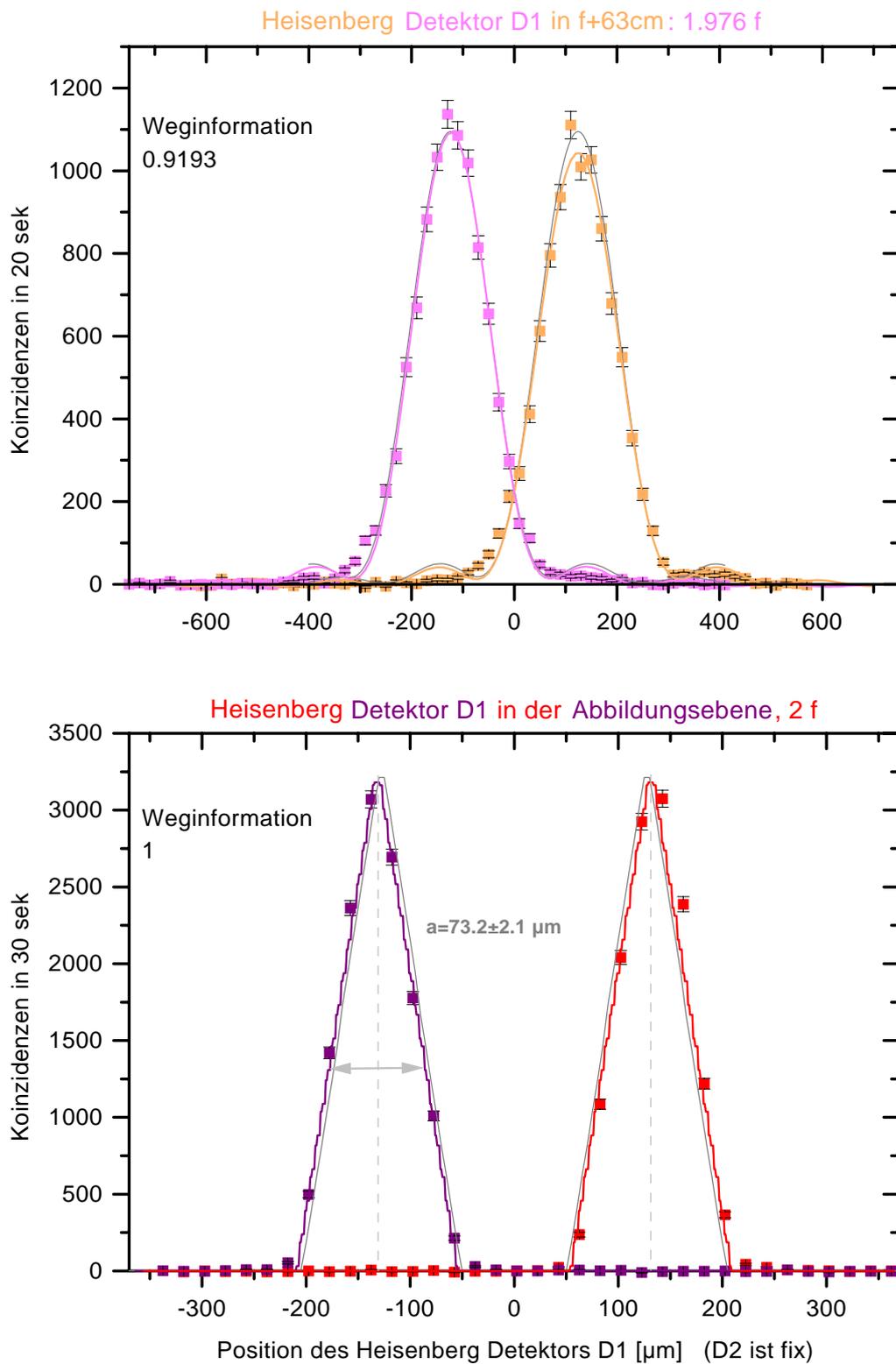


Abbildung 4.30.: Beugungsbilder für jeweils einen Spalt: $1.976f \rightarrow 2f$ (Position des Heisenberg-Detektors D1); in der Abbildungsebene überlagern die Beugungsbilder nicht mehr, wir erhalten zwei Abbildungen der beiden Spalten (gefaltet mit der endlichen Größe des Detektors \rightarrow "dreieckige Spalten"). Detektor D1 führt das Intensitätsmuster ab, D2 ist fix.

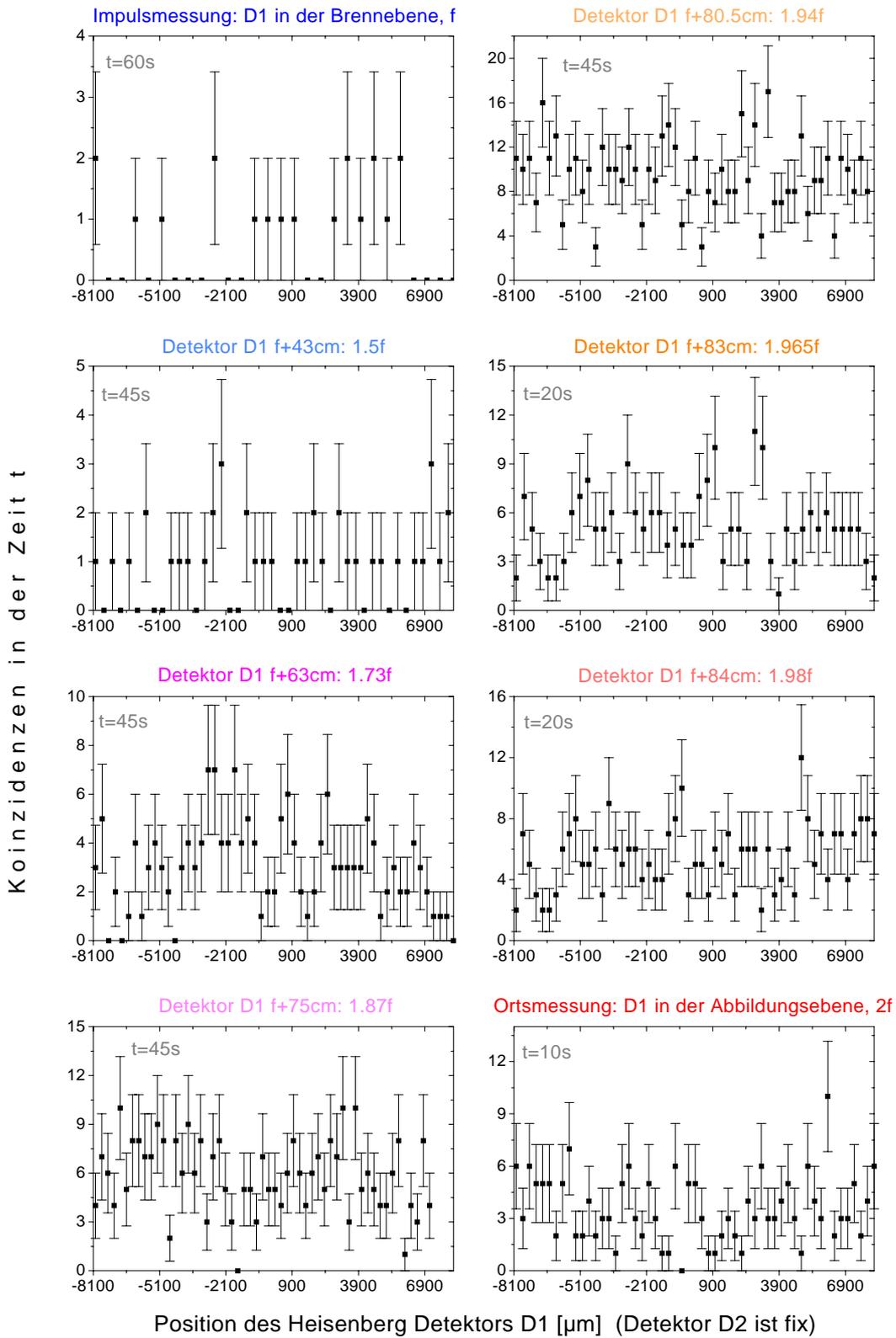


Abbildung 4.31.: Beide Spalten des Doppelspaltes sind vollständig abgedeckt: die Koinzidenzzahlrate sinkt ab, es sind nur noch zufällige Koinzidenzen zu beobachten. Die unterschiedlichen Intensitäten sind auf die unterschiedlichen Einzelzählraten in Heisenberg-Detektor D1 zurückzuführen

4.4. Theoretische Überlegungen

4.4.1. Berechnung der Felder nach dem Klyshko - Bild

Um die zu erwartenden Koinzidenzintensitäten auf eine einfache Art und Weise berechnen zu können, kann man sich des Klyshko - Bildes bedienen.

Einer der beiden Detektoren übernimmt die Rolle der imaginären Quelle, deren Position wir vorerst fix auf Null setzen. Der Weg der Photonen kann verfolgt werden bis zur Detektion im Detektor auf der anderen Seite; die optischen Elemente werden durch Phasenterme berücksichtigt, der Kristall wird wie ein Spiegel behandelt. Das Resultat ist eine Funktion in Abhängigkeit der Position dieses abtastenden Detektors; die Position der 'Quelle' kann nachträglich leicht in die Theorie eingebaut werden.

Mit dieser Methode ist jedenfalls sichergestellt, daß nur jenes Licht berücksichtigt wird, daß auf *beide* Detektoren einfällt.

a.) Berechnung der Felder an den verschiedenen Positionen

Wir starten unsere Rechnung³⁸ mit dem Heisenberg-Detektor D1 als abtastender Detektor und dem Doppelspalt-Detektor D2 als "Quelle".

Unter Annahme einer Punktquelle haben wir nach unserer 'Hilfs'linse eine ebene Welle mit perfekter Kohärenz, die auf den Doppelspalt einfällt. Die Auswirkungen für die endlichen Detektor- und 'Quell'größen werden wir später noch berücksichtigen.

Wir definieren uns drei Koordinatensysteme, deren Position bestimmt wird durch die drei wesentlichen (optischen) Komponenten in unserem Experiment: Doppelspalt, Heisenberglinse und Schirm \equiv Detektor (siehe dazu Abbildung 4.32).

Die Wirkungsweise des Kristalles kann man mit jener eines ebenen Spiegels vergleichen; die schematische Zeichnung wurde deshalb so ausgeführt, als wäre der Kristall gar nicht vorhanden.

Wir beschreiben das Licht beim Doppelspalt mittels einer Summe Huygenscher Elementarwellen, multipliziert mit der Transmissionsfunktion der beiden Spalten, $\tau(x)$. Um den Einfluß der Linse zu beschreiben, bilden wir ein zweites Integral Huygenscher Elementarwellen multipliziert mit der Transmissionsfunktion der Linse, $\tilde{\tau}(\tilde{x})$.

Wir beachten nur Komponenten entlang der x -, \tilde{x} - bzw. x' -Achse. In unserem Experiment sind die Richtungen entlang der y -, \tilde{y} - und y' -Achse insofern bedeutungslos, als das Licht in dieser Richtung nur minimalen, hier nicht interessanten Beugungseffekten unterliegt. Es interessiert uns nur die Beugung- und Interferenz entlang der x -Achse und die Ausbreitung des entsprechenden Musters im Raum entlang der z -Achse.

Wir setzen für den elektromagnetischen Feldvektor $\mathbf{E}(x, \tilde{x}) = \mathbf{E}_0 U(x, \tilde{x})$ und beschränken uns auf die Betrachtung des skalaren Feldes $U(x, \tilde{x})$

$$U(x, \tilde{x}) = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x) \tilde{\tau}(\tilde{x}) \frac{e^{-ik(R+R')}}{R R'} dx d\tilde{x} \quad (4.13)$$

$$\tau(x) = \begin{cases} 1 & (\frac{d}{2} - \frac{a}{2}) \leq |x| \leq (\frac{d}{2} + \frac{a}{2}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

³⁸M.V. Klein, Th.E. Furtak, *Optik*, Springer Verlag, 1988

$$\tilde{\tau}(\tilde{x}) = |\tilde{\tau}(\tilde{x})| e^{i\Phi_0} e^{i\frac{\tilde{x}^2}{2f}}$$

mit dem Betrag der Linsentransmissionsfunktion gleich 1 innerhalb der Dimensionen der Linse, ansonsten Null; Φ_0 ist die konstante Phase definiert durch die Mittendicke der Linse. Zur Berechnung des Integrals approximieren wir den Phasenterm $-ik(R + R')$ durch eine quadratischer Näherung, indem wir R (R') um R_0 (R'_0) bzw. S (S') entwickeln und die Reihe nach dem zweiten (quadratischen) Glied abbrechen (Fresnel-Kirchhoff'sches Beugungsintegral):

$$R + R' \cong R_0 + R'_0 + \frac{\tilde{x}^2}{2} \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} \right) - \tilde{x} \left(\frac{x}{S} + \frac{x'}{S'} \right) \quad (4.14)$$

Wir werden noch einen etwas anderen, äquivalenten Ausdruck verwenden, der sich berechnet durch Abziehen einer Distanz X' von der Strecke S' zurück zum Brennpunkt ($X' = S' - f$), um dann von hier aus durch Addieren der Distanz $\overline{FP'}$ zum Meßpunkt P' zu kommen

$$R + R' \cong S + S' + \frac{x^2}{2(S' - f)} + \frac{\tilde{x}^2}{2} \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} \right) - \tilde{x} \left(\frac{x}{S} + \frac{x'}{S'} \right) \quad (4.15)$$

Eine genaue Herleitung der beiden Gleichungen des Phasenterms $-ik(R + R')$ findet man in Appendix C.

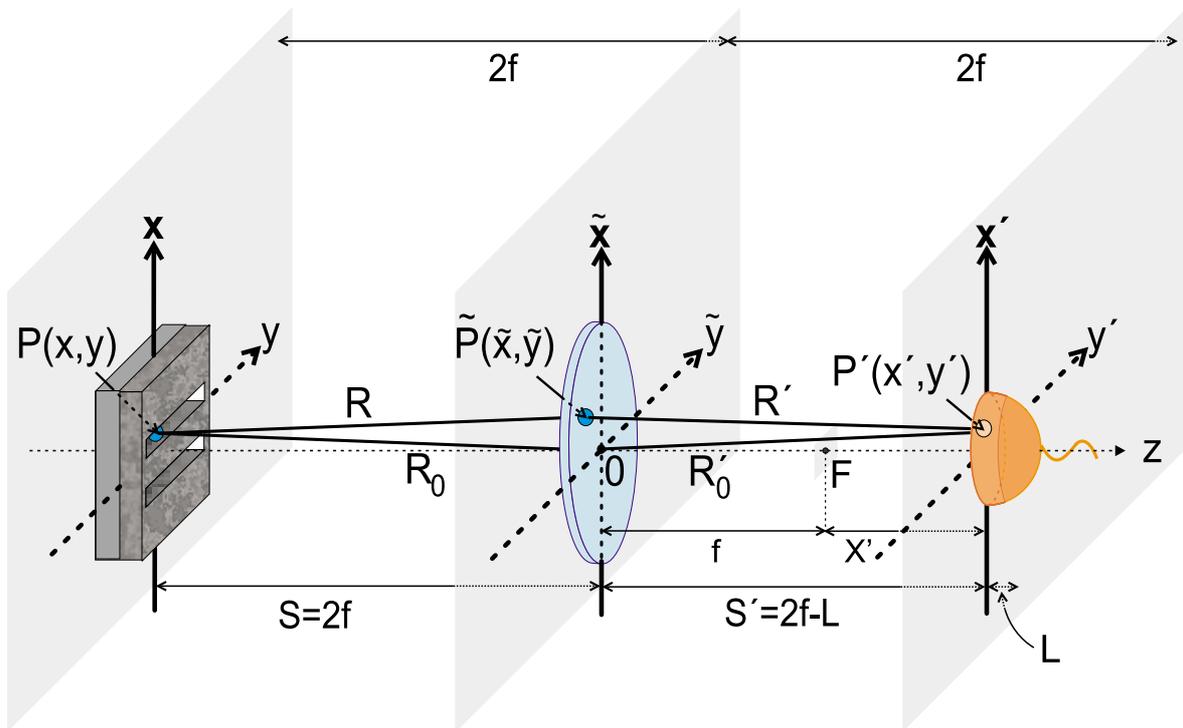


Abbildung 4.32.: Die drei Koordinatensysteme besitzen eine gemeinsame optische Achse, ihr Nullpunkt (der z -Achse) liegt symmetrisch im mittleren System. P , \tilde{P} und P' sind typische Punkte in den jeweiligen Ebenen

Mit den berechneten Phasentermen können wir die Intensitätsverteilung für die beiden Extrempositionen - Brennebene und Abbildungsebene - als auch für Positionen dazwischen berechnen. Von der Intensitätsverteilung in der Abbildungsebene ausgehend führen wir eine

Rücktransformation durch: es ist mathematisch weitaus einfacher, für eine Transformationen zwischen den verschiedenen Positionen zwischen Brenn- und Abbildungsebene als Ausgangsverteilung eine Rechteckfunktion heranziehen zu können (das Bild in der Abbildungsebene der Linse entspricht der Abbildung des Doppelspalt, also im Idealfall eines unendlich kleinen Detektors zwei Rechtecken), statt des Produkts einer sinc-Funktion mit einem Cosinus (die das Interferenzbild in der Brennebene beschreiben).

Heisenberg-Detektor D1 in der Abbildungsebene: $S'=2f$

Nach Einsetzen von $S'=S=2f$ in Gleichung (4.14) vereinfacht sich der dritte Term zu $-\frac{\tilde{x}^2}{2f}$, was sich mit dem \tilde{x} -abhängigen Phasenterm in der Transmissionsfunktion $\tilde{\tau}(\tilde{x})$ der Linse, $\frac{\tilde{x}^2}{2f}$, genau aufheben wird. Die konstanten Terme fassen wir in einem Faktor A zusammen und heben sie vor das Integral ($x' = x_{2f}$)

$$U^{2f}(x_{2f}) = A \int_{\tilde{\sigma}} \tilde{\tau}(\tilde{x}) e^{-ik \frac{\tilde{x}^2}{2f}} e^{ik \frac{\tilde{x}^2}{2} \frac{1}{f}} e^{ik \tilde{x} \frac{x_{2f}}{2f}} \left(\int_{\sigma} \tau(x) e^{ik \tilde{x} \frac{x}{2f}} dx \right) d\tilde{x} \quad (4.16)$$

Führt man das Integral über die 'Start'koordinate x aus, ergibt sich daraus die Fouriertransformierte $T(\tilde{x})$ der ursprünglichen Funktion $\tau(x)$; dies kann man leicht sehen, wenn man x durch u ersetzt: $u := \frac{x}{\lambda 2f}$, mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

$$U^{2f}(x_{2f}) = B \int_{\tilde{\sigma}} \tilde{\tau}(\tilde{x}) e^{ik \tilde{x} \frac{x_{2f}}{2f}} T(\tilde{x}) d\tilde{x}$$

Setzt man für die Koordinate in der Abbildungsebene $v := -\frac{x_{2f}}{2f\lambda}$, ergibt die Ausführung des zweiten Integrals wieder eine Fouriertransformierte und damit gerade die Rücktransformation von $T(\tilde{x})$ zu $\tau'(x_{2f})$

$$U^{2f}(x_{2f}) = \tau'(x_{2f}) = \begin{cases} 1 & (\frac{d}{2} - \frac{a}{2}) \leq |x| \leq (\frac{d}{2} + \frac{a}{2}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.17)$$

Wir erhalten in quadratischer Näherung die exakte Abbildung unseres Doppelspalt mit einer Vergrößerung von 1. Bei Erweiterung der Reihenglieder würden Terme höherer Ordnung die Beugungstheorie für Aberrationen liefern, die wir aber in unserer Rechnung vernachlässigen können.

Heisenberg-Detektor D1 in Mittenposition: $f < S' < 2f$

Ausgehend von der Abbildungsebene, definiert durch die Koordinate x_{2f} , werden wir das Feld rücktransformieren ($x_f < x' < x_{2f}$).

$$U(x') = \int_{\sigma_{2f}} U^{2f}(x_{2f}) \tau'(x_{2f}) \frac{e^{ik R_{2f \rightarrow'}}}{R_{2f \rightarrow'}} dx_{2f} \quad (4.18)$$

Wir definieren die Distanz L als jene Strecke entlang der z-Achse, um die die Meßposition (x') nach vorne Richtung Heisenberglinse verschoben wird (hier ist $L = f$). Allerdings benutzen

wir zur Beschreibung des Feldes in der Abbildungsebene, $U^{2f}(x_{2f})$, nun Gleichung (4.15) und setzen dort für $S + S' = 4f$

$$U^{2f}(x_{2f}) = B e^{-ik4f} e^{-ik \frac{x_{2f}^2}{2f}} \tau'(x_{2f})$$

Wir entwickeln $R_{2f \rightarrow '}$ (Übergang von der Abbildungsebene auf die Ebene der Meßposition) in einer Reihe um L und können Terme höherer Ordnung wieder vernachlässigen

$$R_{2f \rightarrow '} \cong L \left(1 + \frac{(x_{2f} - x')^2}{2L^2} + \dots \right)$$

Mittels dieser beiden Gleichungen erhalten wir für das Feld den ganz allgemeine Ausdruck

$$U'(x') = A \frac{e^{ikL}}{L} e^{ik \frac{x'^2}{2L}} \int_{\sigma_{2f}} \tau'(x_{2f}) e^{-ik \frac{x'}{L} x_{2f}} e^{-ik \frac{x_{2f}^2}{2} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{f} \right)} dx_{2f} \quad (4.19)$$

für eine beliebige Position $2f-L$ des Heisenberg-Detektors zwischen der Brennebene und der Abbildungsebene der Linse.

Das Integral beschreibt den Übergang zwischen einem perfekten Interferenzmuster und der Abbildung des Doppelspaltes und spiegelt die schon besprochenen Effekte, z.B. auf den Interferenzkontrast, wieder.

Heisenberg-Detektor D1 in der Brennebene der Linse: $S'=f$

Mit $L = f$ in Gl. (4.19) verschwindet der zweite Exponentialterm, $e^0 = 1$. Das restliche Integral ist nun einfach zu lösen, es ist simpel die Fouriertransformierte der Abbildung der Transmissionsfunktion des Doppelspaltes, $\tau'(x_{2f})$, also $T(x_f)$ ($x' = x_f$).

Wir erhalten daher als Ergebnis des Integrals

$$U^f(x_f) = B \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda f} x_f\right) \cos\left(\frac{\pi d}{\lambda f} x_f\right) \quad (4.20)$$

Konkret wird das Feld in der Brennebene durch ein Produkt aus einer sinc-Funktion und einer Cosinus-Funktion beschrieben. Erstere gibt die Einhüllende wieder - verursacht durch die Beugung des Lichtes durch die endliche Spaltbreite -, zweitere die Interferenzeffekte des Lichtes von den beiden Spalten. Der Faktor B beinhaltet die Ausgangsamplitude des Feldes und konstante Phasenterme, die bei Berechnung der Zählraten wegfallen.

Die Ergebnisse sowohl für die Abbildungsebene als auch für die Brennebene sind analog zu jenen, die wir aus den anschaulichen Überlegungen mithilfe des Klyshko-Bildes erhielten.

b.) Miteinbeziehung der Position von Doppelspalt-Detektor D2

Bisher gingen wir davon aus, daß der Heisenberg Detektor D1 der abtastende Detektor ist. Wenn wir die Situation umkehren wollen, müssen wir die bisher Null gesetzte Position des Doppelspalt-Detektors D2 mit ins Spiel bringen.

Verschieben wir Detektor D2 von $x_{D2}=0$ nach $x_{D2}=\bar{x}_{D2}$ so ist das im Klyshko-Bild gleichbedeutend mit einer Änderung des Einfallswinkels θ der ebenen Welle auf den Doppelspalt,

Die Felder für die Detektion eines der beiden Teilchen in Doppelspalt-Detektor D2 an der Position x_{D2} in Koinzidenz mit der Detektion des Geschwisterphotons in Heisenberg-Detektor D1 an der Position x_{D1} haben wir schon berechnet, s. Gl. (4.21). Die Koinzidenzzählrate ergibt sich zu

$$\tilde{P}_{12}(x_{D1}, x_{D2}) = \left| \int_{\sigma_{2f}} \tau'(x_{2f}) e^{-ik \frac{x_{2f}^2}{2} (\frac{1}{L} - \frac{1}{f})} e^{-ik x_{2f} (\frac{x_{D1}}{L} + \frac{x_{D2}}{f_2})} dx_{2f} \right|^2 \quad (4.24)$$

Dies ist der ganz allgemeine Ausdruck, mit dem man die zu erwartende Koinzidenzintensität für jede beliebige Konfiguration theoretisch berechnen kann.

Um die endlichen Größen der beiden Detektoren berücksichtigen zu können, integrieren wir über die "Quell"größe und falten die Zählrate mit dem Detektions-Einzelspalt des abtastenden Detektors. Wenn beispielsweise Doppelspalt-Detektor D2 fährt und Heisenberg-Detektor D1 fixiert bleibt, integrieren wir über die Quellgröße D1 ($2r_{D1}$) und falten dann das resultierende Intensitätsmuster mit einer (den Doppelspalt-Detektor D2 beschreibenden) Rechteckfunktion von der Breite $2r_{D2}$.

$$\frac{1}{2r_{D1}} \int_{-r_{D1}}^{+r_{D1}} \left| \int_{\sigma_{2f}} \tau'(x_{2f}) e^{-ik \frac{x_{2f}^2}{2} (\frac{1}{L} - \frac{1}{f})} e^{-ik x_{2f} (\frac{x_{D1}}{L} + \frac{x_{D2}}{f_2})} dx_{2f} \right|^2 dx_{D1}$$

Daraus erhält man schließlich die Zählrate zu

$$P(x_{D1}, x_{D2}) = \frac{1}{2r_{D2}} \int_{x_{D2}-r_{D2}}^{x_{D2}+r_{D2}} \left[\frac{1}{2r_{D1}} \int_{-r_{D1}}^{+r_{D1}} \tilde{P}_{12}(x_{D1}, x') dx_{D1} \right] dx' \quad (4.25)$$

Wie wir schon in den Meßdaten gesehen haben, gewinnt die Faltung umso mehr an Bedeutung, je größer die detektierende Fläche in Relation zur Breite des Modulationsmusters ist (wird). Dies ist vor allem wichtig für die Messungen mit dem Doppelspalt-Detektor D2 fix und dem Heisenberg-Detektor als das Muster abfahrender Detektor. In dieser Konstellation wird das Intensitätsmuster, wie wir schon gesehen haben, immer schmaler, von einer Breite von 16 cm (Interferenzbild) bis zu $330 \mu\text{m}$ (Abbildung des Doppelspaltes).

a. Faltungsintegral - Berücksichtigung der endlichen Größe des abtastenden Detektors.- Während bei Abtasten mittels des Doppelspalt-Detektors D2 das Faltungsintegral für jede Art der Messung konstant vernachlässigbar war (das Verhältnis Modulationsmuster relativ zum Detektionsspalt liegt in der Größenordnung von 10^{-3}), ändert sich der Einfluß des Faltungsintegrals bei Abfahren mittels des Heisenberg-Detektors D1 beträchtlich. Die Breite der Modulationsstruktur variiert hier von 1.6 cm (bei einer Impulsmessung) bis zu $330 \mu\text{m}$ (bei einer Ortsmessung \rightarrow Abbildung des Doppelspaltes).

Das Faltungsintegral kann deswegen nur für Impulsmessungen vernachlässigt werden, in der Abbildungsebene ergibt die Faltung zweier gleich breiter Rechteckfunktionen (Detektor und Doppelspalt: $2r=a$) gerade eine Dreiecksfunktion.

a. "Quellgrößen"integral - Berücksichtigung der endlichen Größe des fixierten Detektors.- Umgekehrtes gilt für die Integration über die "Quell"größe, also der Größe jenes Detektors, der jeweils fixiert bleibt:

fahren wir beispielsweise das Muster mittels Heisenberg-Detektor D1 ab (Doppelspalt-Detektor D2 \equiv "Quelle"), so ändert sich aufgrund der fixen Distanz des Doppelspalt-Detektor D2 zur

'Hilfs'linse die mit der Quellgröße implizierten Winkel für keinen der Datensätze. Der maximale Winkel, unter dem die Photonen auf den Doppelspalt einfallen, ergibt sich aus der Brennweite der 'Hilfs'linse (14.1 cm) und der Größe des Detektors (35 μm) zu (s. App. C)

$$\alpha_{(out)}^{max} = -\frac{r_{(in)}}{f} = -\frac{35 \mu\text{m}/2}{0.124\text{m}} \equiv \Delta\alpha/2$$

Die Divergenz des "auf den Doppelspalt einfallenden" Lichtfeldes ist zu klein, um einen beobachtbaren Einfluß auf das Ergebnis zu haben.

Im Gegensatz dazu darf bei Abtasten mittels des Doppelspalt-Detektors D2 die Größe des Heisenberg-Detektors nicht von vornherein vernachlässigt werden. Zwar ist bei einer Impulsmessung der Beitrag des Integrals verschwindend gering und nicht mehr beobachtbar (die Einfallswinkel sind sehr klein, $\Delta\alpha = 0.0465 \text{ mrad}(!)$), allerdings nehmen diese Winkel beim Übergang von Impuls- zur Ortsmessung rasch zu und bewirken eine Reduzierung des Kontrastes.

Unsere theoretischen Kurven wurden alle mithilfe von Gl.(4.25) unter Berücksichtigung der beiden Detektorgrößen berechnet.

4.4.2. Berechnung von Kontrast und Weginformation

Ganz allgemein³⁹ kann die Überlagerung zweier (teilweise) kohärenter Ausgangsfelder, U_1 , U_2 , mit den Intensitäten $I_{1,2} = \langle |U_{1,2}|^2 \rangle$, mithilfe ihrer normalisierten Korrelationsfunktion, $g_{12} = \frac{\langle U_1^* U_2 \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}}$, angeschrieben werden

$$\begin{aligned} I &= \langle |U_1 + U_2|^2 \rangle \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |g_{12}| \cos(\phi) \end{aligned}$$

$\phi = \arg(g_{12})$ gibt die Phase, $|g_{12}|$ ein Maß, wie sehr die Fluktuationen der beiden Felder korreliert sind. Die Korrelationsfunktion bestimmt damit die Tiefe der Modulationen: sie ist proportional zum Kontrast des Intensitätsmusters

$$Vis = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{(I_1 + I_2)} |g_{12}|$$

Für gleiche Anfangsintensitäten, $I_1 = I_2$, ist die Korrelationsfunktion gleich dem Interferenzkontrast, $Vis = |g_{12}|$.

Generell wird die Gesamtintensität I sinusförmig mit einer bestimmten Phase (ϕ) variieren und der Kontrast des Interferenzmusters ist definiert als das Verhältnis der Differenz von Maximal- und Minimalintensität zur Summe dieser beiden Intensitäten (Normierung)

$$Vis = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (4.26)$$

Der Interferenzkontrast kann so im allgemeinen leicht bestimmt werden.

Wenn wir unsere Datensätze betrachten, so stellen wir fest, daß aufgrund der nur numerisch lösbaren Integrale (ausgenommen für die Messung in der Brenn- und Abbildungsebene) die einfache Berechenbarkeit für die Intensitätsverteilung nur bei einer Impulsmessung gilt.

³⁹B.E.A. Saleh, M.C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, J. Wiley & Sons Inc., 1991

Dort läßt sich der Kontrast direkt aus der an die Daten angepaßten Kurve ablesen (vgl. Gl. (4.20))

$$Int(x) = \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda f}\right) 0.5 (1 + \text{Vis} \cos(2 \frac{\pi d x}{\lambda f}))$$

Aus den nur numerisch zu berechnenden Doppelintegralen für die Mittenpositionen läßt sich der Kontrast nicht mehr so leicht eruieren.

Die zwei Intensitäten, I_{max} und I_{min} , sind durch eine Einhüllende, abhängig von der Koordinate x_{D1} (x_{D2}), modelliert; im analytisch lösbaren Fall der Impulsmessung ist das die sinc^2 -Funktion.

Die Einhüllende ist jene Kurve, die man für zwei inkohärent überlagerte Wellen beobachten würde (multipliziert mit einem Faktor 2 - das Interferenzmaximum ist hier das Doppelte der inkohärent addierten Intensitäten von den beiden Spalten).

Mathematisch kehren wir die Reihenfolge von Addition und Absolutbetrag um und erhalten mit Bezug auf Gleichung (4.21) und mit $x_{D2}=0$ (Doppelspalt-Detektor D2 sei fix)

$$U_1(x_{D1}) = B \int_{\frac{d}{2}-\frac{a}{2}}^{\frac{d}{2}+\frac{a}{2}} \tau'(x_{2f}) e^{-ik \frac{x_{2f}^2}{2} (\frac{1}{L}-\frac{1}{f})} e^{-ik \frac{x_{D1}}{L} x_{2f}} dx_{2f}$$

$$U_2(x_{D1}) = B \int_{-\frac{d}{2}-\frac{a}{2}}^{-\frac{d}{2}+\frac{a}{2}} \tau'(x_{2f}) e^{-ik \frac{x_{2f}^2}{2} (\frac{1}{L}-\frac{1}{f})} e^{-ik \frac{x_{D1}}{L} x_{2f}} dx_{2f}$$

Durch eine Faltung mit der endlichen Detektorgröße

$$P_{max/min}(x_{D1}) = \frac{1}{2r} \int_{x_{D1}-r}^{x_{D1}+r} (|U_1(t')|^2 + |U_2(t')|^2) dt' \quad (4.27)$$

erhalten wir die Grundfunktion für die Anpassungskurven: durch Variieren der Parameter Offset, Amplitude 1 und 2, Phase und Distanz L in obiger Funktion erhält man die gefitteten Kurven durch die Maximalpunkte (bzw. Minimalpunkte) des Interferenzmusters.

Der Kontrast ergibt sich aus den Flächen, die die an die Daten angepaßten Kurven mit der x_{D1} -Achse einschließen - in analoger Weise zur Definition in Gleichung (4.26)

$$\text{Vis} = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \quad (4.28)$$

Zur Berechnung der Weginformation stützen wir uns auf die Rechnungen von B.G. Englert⁴⁰

$$W_{info} = \int |p_1(x) - p_2(x)| dx \quad (4.29)$$

$p_{1/2}$ sind die normierten Wahrscheinlichkeitsamplituden für den Weg des Photons durch den Doppelspalt; die Differenz der beiden spiegelt die Vorhersagbarkeit des Weges durch das Interferometer wieder: sind die beiden Amplituden (Wahrscheinlichkeit des Photons, durch den Spalt 1/2 zu gehen) gleich groß, so ist eine Vorhersage unmöglich und die Weginformation gleich Null; ist eine der beiden Amplituden Null, so muß die andere 1 sein, der Weg des Photons ist exakt bestimmt.

Wir erhalten die Wahrscheinlichkeitsamplituden aus unseren Einelspalt Messungen (jeweils

⁴⁰B.G. Englert, *Fringe Visibility and Which Way Information: An Inequality*, PRL 77, 2154 (1996)

ein Spalt abgedeckt). Die mathematische Beschreibung der Zählrate erhält man aus Gleichung (4.21), allerdings durch Integrieren über nur noch einen Spalt (z.B. der obere Spalt)

$$P_{\text{Einzelssp.}}(x_{D1}) = \frac{1}{2r} \int_{x_{D1}-r}^{x_{D1}+r} \left| \int_{\frac{d}{2}-\frac{a}{2}}^{\frac{d}{2}+\frac{a}{2}} \tau'(x_{2f}) e^{-ik \frac{x_{2f}^2}{2} (\frac{1}{L}-\frac{1}{f})} e^{-ik \frac{t'}{L} x_{2f}} dx_{2f} \right|^2 dt' \quad (4.30)$$

Diese Funktion kann wieder mit den Parametern Offset, Amplitude, Distanz L an die Datensätze angenähert werden. Normiert man die angepaßten Kurven, so entsprechen sie den Wahrscheinlichkeitsamplituden aus Gleichung (4.29) mittels derer wir die Weginformation berechnen.

4.5. Gegenüberstellung von Weginformation vs. Interferenzkontrast

Das Phänomen der gegenseitigen Ausschließung der exakten Messung zweier konjugierter Variablen ist eine der faszinierendsten Effekte in der Welt der kleinsten Teilchen und fand seine Beschreibung in Bohr's Komplementaritätsprinzip. Ein vielzitiertes und anschauliches Beispiel ist der "Welle-Teilchen Dualismus", besonders deutlich und klar zu beobachten in Zwei-Weg Interferometern wie z.B dem Mach-Zehnder Interferometer oder einem Doppelspalt Interferometer⁴¹.

Mittels eines Gedankenexperiments, das Einstein 1927 anlässlich seiner Diskussionen mit Bohr auf dem Solvay Kongreß in Brüssel entwarf, versuchte er eine gleichzeitige Messung von Weginformation und Interferenz zu verifizieren um so die Theorie ad absurdum zu führen.

Ausgehend von einem Einzelspalt (siehe Abbildung 4.34) passieren die Teilchen, z.B. Elektronen oder Photonen, einen Doppelspalt und werden am dahinterliegenden Schirm detektiert: man beobachtet das übliche Interferenzmuster.

Um zusätzliche Informationen über das Phänomen zu erhalten, wird die Platte mit dem Einzelspalt auf Federn aufgehängt, sodaß aufgrund ihrer Auslenkung rückgeschlossen werden kann auf die Richtung des Teilchens hinter dem Spalt: läuft das Teilchen nach oben, so erhält die Platte einen Impulskick nach unten und vice versa.

Auf diese Weise sollte es nach Einsteins Überlegungen möglich sein, gleichzeitig und am selben Teilchen Interferenz und Weginformation zu messen.

Allerdings zeigt sich bei genauerer Betrachtung die Unmöglichkeit des Unterfangens: Um die Impulsdifferenz $p_1 - p_2$ ($p_1 \equiv$ Teilchen geht durch den oberen Spalt, analoges gilt für p_2) messen zu können, muß die Impulsunschärfe der Platte vor der Messung um vieles kleiner gewesen sein, $\Delta p \ll (p_1 - p_2)$. Dies beinhaltet andererseits aufgrund der Unschärferelation eine Ortsunschärfe der Platte, die groß genug ist das Interferenzmuster zu zerstören.

Ist ε der Winkel, den die zwei möglichen Wege zum Doppelspalt (ausgehend vom Einzelspalt) miteinander einschließen, und \mathbf{k} der Wellenvektor des Teilchens, so beträgt der Impulstransfer, den ein Photon auf die Platte ausübt, gerade $\pm h k \varepsilon / 2$.

Die minimale Gesamtunschärfe der Plattenposition ist $h / (\Delta p_{ges})$, also $1 / (k \varepsilon)$. Bei gleich

⁴¹ ...[double slit experiment]...which has in it the heart of quantum mechanics; in reality it contains the only mystery (R.P. Feynman); siehe dazu Kapitel 3, *Einige grundlegende Konzepte der Quantenmechanik*

großen Plattenabständen entspricht dieser Wert der resultierenden Unschärfe der Interferenzmaxima am Schirm. Da der Abstand der Maxima aber gerade $k \varepsilon$ beträgt, verwischt

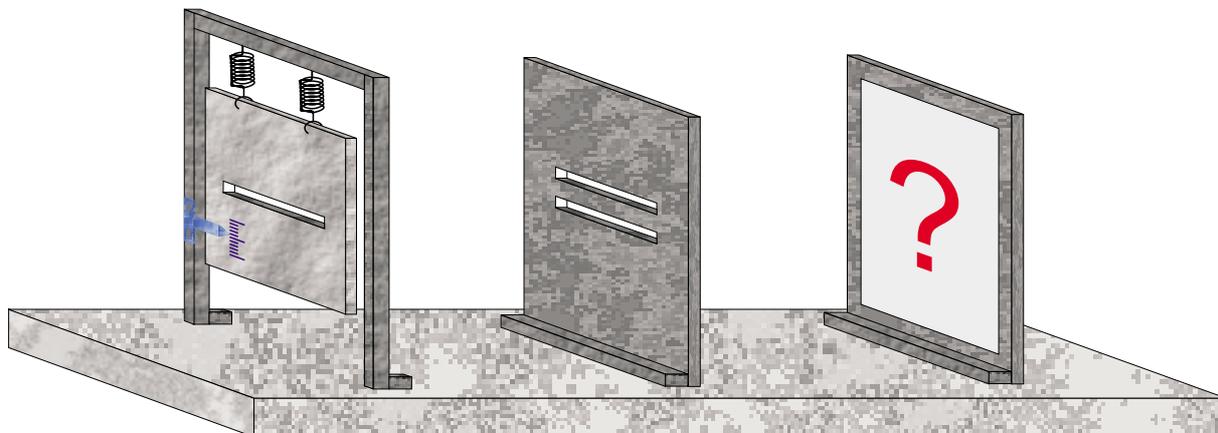


Abbildung 4.34.: Einstein's Recoiling Slit zur Bestimmung des Weges des Photons durch den Doppelspalt; durch die resultierende Unschärfe des "Quellspaltes" wird jedoch jede Interferenz zerstört

jede Interferenz! Es ist nicht möglich, gleichzeitig exakte Informationen über den Impuls und den Ort des Teilchens zu erhalten.

Ein analoges Resultat erhält man natürlich auch für andere Abstände der Platten.

Die Extremsituationen "volle Weginformation - kein Kontrast" einerseits und "keine Weginformation - 100% Kontrast" andererseits sind einfach zu verstehen und anhand von Gedankenexperimenten leicht zu zeigen. Der interessante Zwischenbereich "Wieviel Weginformation kann ich erhalten bei einem bestimmten Interferenzkontrast?" ist allerdings nicht so schnell einsichtig⁴².

Wooters und Zurek⁴³ untersuchten das Problem mithilfe eines Informations-theoretischen Ansatzes anhand von Einsteins Version des Doppelspaltexperiments (siehe Abbildung 4.34): ist $p_{A/B}$ die Wahrscheinlichkeit, daß das Photon durch den unteren / oberen Spalt geht, so ergibt sich das Maß an *Nicht*information (Information, die wir über das System nicht haben) zu $H = -\sum_{i=1}^N p_i \ln(p_i) = -(p_A \ln(p_A) + p_B \ln(p_B))$. Das ist genau jene Weginformation, auf die man *mindestens* verzichten muß, um einen bestimmten Kontrast der Modulationen sehen zu können. Der Verlust ist verschieden für verschiedene Methoden der Ortsbestimmung⁴⁴. Er ist am kleinsten für Photonen in einem reinen Zustand.

Analysen für den Fall eines Neutronen-Interferenzexperiments stammen von A. Zeilinger⁴⁵ oder D.M. Greenberger und A. Yasin⁴⁶.

Eine jüngere Analyse des Problems, die wir in dieser Arbeit zur Untersuchung unserer Daten

⁴²D.M. Greenberger, A. Yasin, *Simultaneous Wave and Particle Knowledge in a Neutron Interferometer*, Phys.Lett.A 128, 391 (1988)

⁴³W.K. Wooters, W.H. Zurek, *Complementarity in the Double-Slit Experiment: Quantum Nonseparability and a Quantitative Statement of Bohr's Principle*, Phys. Rev. D 19, 473 (1979)

⁴⁴der Informationsverlust ist am kleinsten, wenn alle Photonen dieselbe größere oder kleinere Wahrscheinlichkeit besitzen, durch einen der beiden Spalten zu gehen; er ist größer, wenn z.B. zur Erzielung desselben Kontrastes kurzfristig ein Spalt völlig abgeblockt wird

⁴⁵A. Zeilinger, *Complementarity in Neutron Interferometry*, Physica 137B, 235 (1986)

⁴⁶D.M. Greenberger, A. Yasin, *Simultaneous Wave and Particle Knowledge in a Neutron Interferometer*

verwendet haben, stammt von B.G. Englert⁴⁷. Das zentrale Resultat ist eine Ungleichung zur Bestimmung eines Limits für das Ausmaß an erlaubter Weginformation bei einem bestimmten Interferenzkontrast (und vice versa)

$$W_{info}^2 + Vis^2 \leq 1 \quad (4.31)$$

Die Weginformation (oder Vorhersagbarkeit) ist definiert über die Differenz der Wahrscheinlichkeitsamplituden der beiden möglichen Wege (s. Gl. (4.29)).

Wettet man auf den wahrscheinlicheren Weg der beiden, so ist die Trefferquote $\frac{1+W_{info}}{2}$: bei einer Ortsmessung, $W_{info} = 1$, kann ich den Weg mit Gewißheit vorhersagen, für eine Impulsmessung, $W_{info} = 0$, habe ich nur noch eine 50:50 Chance richtig zu tippen.

Um aus unseren Datensätzen (Messungen mit jeweils nur einem Spalt offen) die entsprechende Information zu erhalten, nimmt man die Differenz der beiden normierten Kurvenflächen: Am Schnittpunkt der beiden Kurven sind die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Spalten gerade gleich groß, der Interferenzkontrast ist maximal. Geht man entlang der x' -Achse in eine Richtung, so nimmt die Wahrscheinlichkeit, daß das Photon von Spalt1 stammt ab, während jene für den anderen Spalt zunimmt bis zum Extremfall der Gewißheit des Weges eines Photons (siehe Abbildung 4.35).

Um daher die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten an den verschiedenen Punkten x_{D1} zusammenzufassen zu einer gesamten Weginformation, wird über die Differenz an jedem Punkt x_{D1} integriert, was Gleichung (4.29) liefert.

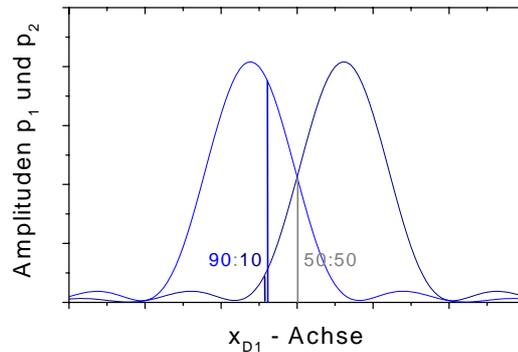


Abbildung 4.35.: Vorhersagbarkeit des Weges für ein einzelnes Photon an einer Position x_{D1}

Mittels der in Kapitel 4.4.2 hergeleiteten Gleichungen und Funktionen zur Bestimmung von Interferenzkontrast und Weginformation

$$Vis = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}$$

$$W_{info} = \int |Esp_1(x') - Esp_2(x')| dx'$$

mit $Esp_{1/2}$ gleich der normierten, an die Daten angepaßte Kurve für die Einzelspaltmessungen (ein Spalt abgedeckt), können die entsprechenden Werte aus den gefitteten Datensätzen berechnet werden.

Die Parameter zur Anpassung an unsere Daten waren Offset, Amplitude(n), Phase und die Distanz L , die die Art der Messung definiert.

Die Anpassungskurven sowohl für die Einhüllenden als auch die Einzelspalt-Beugungsbilder wurden ausgeführt mit dem Faltungsintegral zur Berücksichtigung der endlichen (fix gehaltenen) Breite des abtastenden Detektors.

⁴⁷ B.G. Englert, *Fringe Visibility and Which Way Information: An Inequality*, PRL 77, 2154 (1996)

Wenn man sich jetzt diese Kurven aus den angepaßten Parametern bestimmt, nun aber *ohne* das Faltungsintegral auszuführen, und daraus die Weginformation und den Interferenzkon-

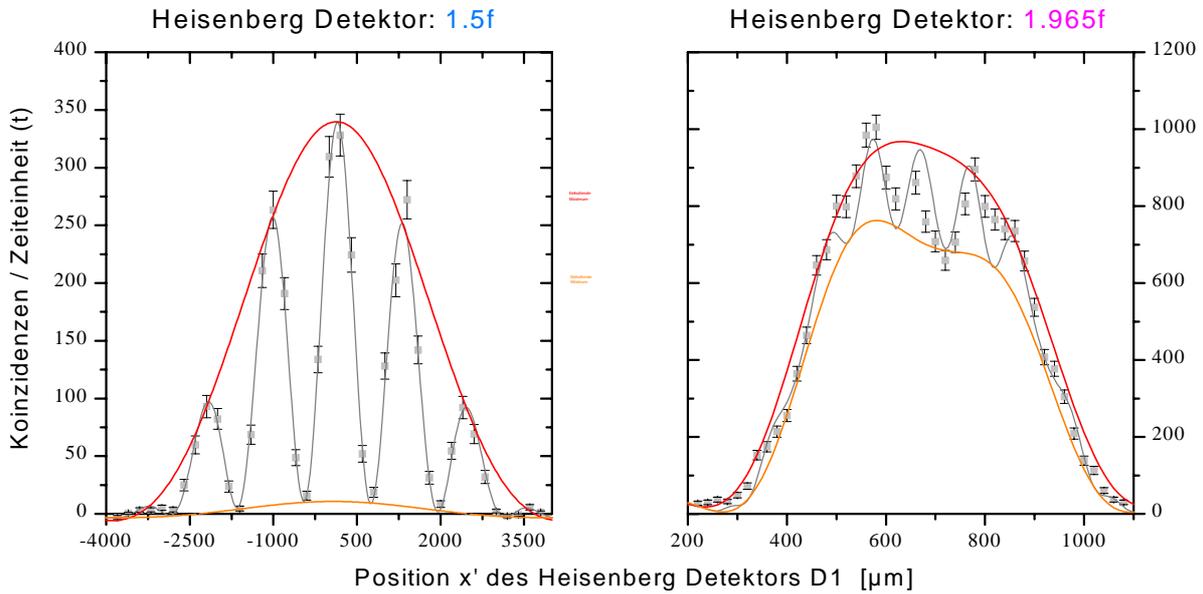


Abbildung 4.36.: Anpassungskurven für die Einhüllende des Interferenzmusters, Maximum und Minimum. Bei diesen beiden Datensätzen steht der Heisenberg-Detektor D1 bei $1.5f$ ($f+43$ cm) und bei $1.965f$ ($f+83$ cm)

trast berechnet, erhält man auf einfache Weise jene Werte, wie wir sie für einen idealen punktförmigen Detektor gemessen hätten.

In Tabelle 4.7 sind diese Paare Weginformation- Interferenzkontrast, die für alle 8 Positionen des Heisenberg-Detektors aus den jeweiligen Datensätzen extrahiert werden konnten, aufgelistet.

Position D1	Interferenzkontrast	Weginformation
f	0.9785	0.0093
1.5f	0.9628	0.1553
1.73f	0.9174	0.1719
1.87f	0.9200	0.3414
1.936f	0.7937	0.4688
1.965f	0.5007	0.7579
1.976f	0.4609	0.9201
2f	0	1

Tabelle 4.7.: Interferenzkontrast und Weginformation für die verschiedenen Positionen von Heisenberg-Detektor D1, $f \rightarrow 2f$

Abb. 4.37 zeigt uns die Paare und vergleicht sie mit Englerts Ungleichung: die durchgezogene, theoretische Kurve liefert uns die maximal mögliche Weginformation bei einem bestimmten

Interferenzkontrast (nur Werte, die in einem Bereich liegen, der von der Kurve und der x-Achse eingeschlossen wird, erfüllen die Ungleichung und sind theoretisch erlaubt). Die Fehlerbalken berechnen sich aus dem Fehlerquadrat (χ^2) der Anpassungskurven (s. Kap. 93).

Für eine Ortsmessung erhalten wir aufgrund der perfekten Abbildung des Doppelspaltes eine 100%ige Auflösung des Weges des Photons. Die beiden Peaks der zwei Spalten sind

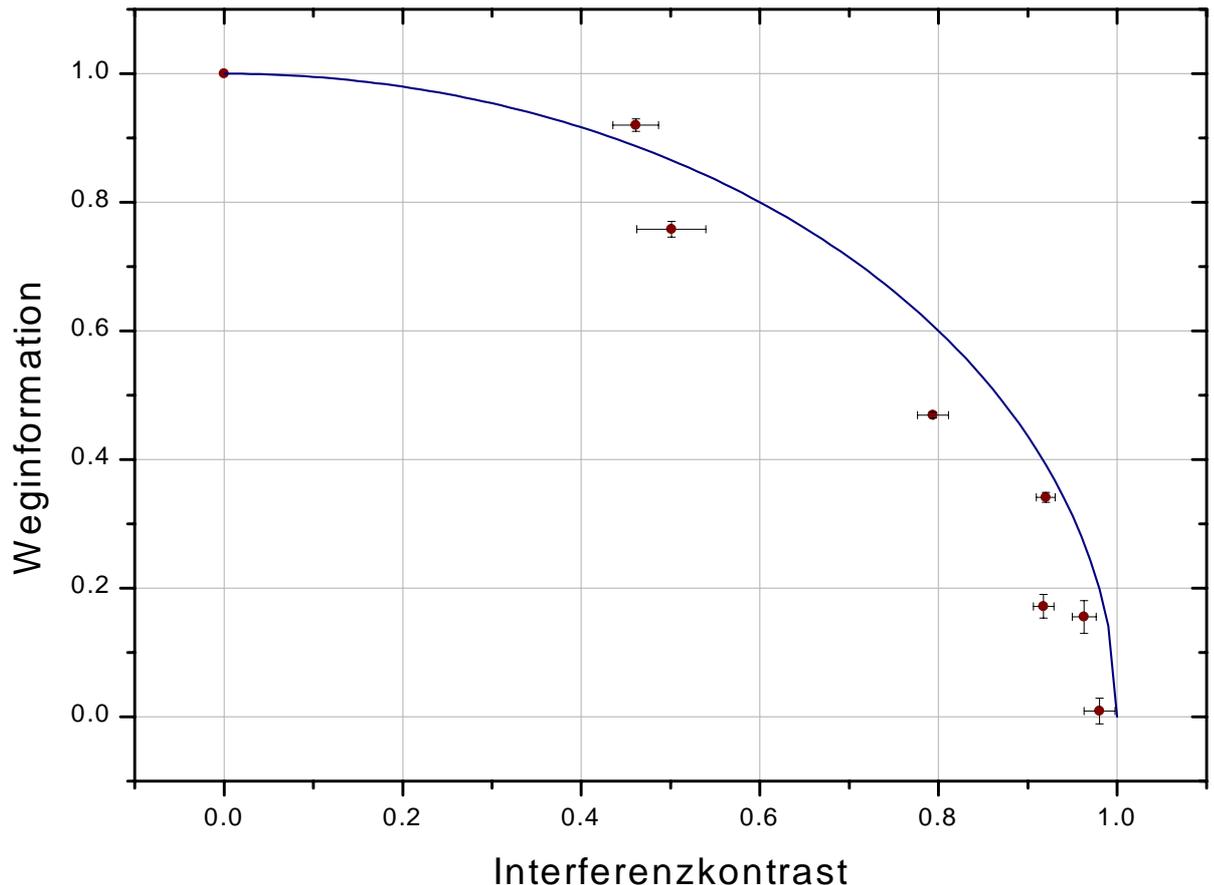


Abbildung 4.37.: Die Weginformation in Abhängigkeit des Interferenzkontrastes im Intervall [Impulsmessung; Ortsmessung]. Die Werte für die Datenpunkte erhielten wir aus den vorangegangenen Messungen (s. Kap 4.3.2). Die durchgezogene Kurve beschreibt den theoretischen Verlauf nach Englerts Ungleichung.

perfekt voneinander getrennt. Es ist leicht erkennbar, dass hier keine Interferenzen mehr zu beobachten sind, der Interferenzkontrast ist Null, $Vis = 0$.

Im anderen Extremfall, für eine Messung des Impulses, ist der gemessene Interferenzkontrast etwas kleiner als der von der Theorie vorgegebene, ($Vis_{Theorie} = 100\%$). Die Diskrepanz von 1-2% liegt allerdings, wie schon ausführlich diskutiert, innerhalb des Meßfehlers.

Auch in den Mittenpositionen erhalten wir gute Werte, es fallen allerdings zwei Messungen auf:

Erstere ist jene bei einer Position des Heisenberg-Detektors von 1.73 f hinter der Linse. Die Messungen für die Weginformation und/oder den Interferenzkontrast liefern kleinere Werte. Im Gegensatz dazu erhalten wir bei einer Meßposition 1.976 f einen über den theoretischen

Werten liegenden Interferenzkontrast und / oder Weginformation.

4.6. Ein Experiment mit verzögerter Entscheidung

Mit der Feststellung *No elementary phenomenon is a phenomenon until it is a recorded phenomenon*, stellt sich konsequenterweise die Frage, was passieren würde, könnte man die Entscheidung für die Messung einer von zwei komplementären Variablen hinauszögern.

Welche Effekte und Meßresultate können wir erwarten, wenn wir in unserem Experiment eine zufällige Schaltung für Impulsmessung oder Ortsmessung in der Weise einbauen, daß das Geschwisterphoton zum Zeitpunkt dieser Entscheidung schon längst detektiert ist? Und vor allem: welche Aussagen können wir, wenn überhaupt, über die Vergangenheit - über den Zustand des Systems vor der Messung - treffen?

Bestimmen wir *nachträglich* durch unsere Entscheidung für eine der beiden komplementären Messungen, ob das Photon durch beide Spalten zu gehen hat oder eben nur durch einen Spalt?

Experimente mit verzögerter Entscheidung der Art der Messung waren ein Diskussions-thema von Bohr und Einstein beim Solvay Kongreß 1927, Weizsäcker analysierte dieses Thema in zwei Veröffentlichungen^{48,49} und es existieren einige Vorschläge verschiedener Autoren^{50,51,52,53} bzw. ein 1987 durchgeführtes Experiment⁵⁴.

Betrachten wir zur Veranschaulichung des Problems ein Gedankenexperiment mit verzögerter Entscheidung in der Form von Abb. 4.38.

Ein einzelnes Photon trifft auf einen Strahlteiler, der zwei Wege für das Photon ermöglicht. Mittels zweier Spiegel und eines zweiten Strahlteilers können die beiden Möglichkeiten überlagert werden.

Stellen wir die beiden Photodetektoren *hinter* den zweiten Strahlteiler (1,2), entspricht der Aufbau einem Mach-Zehnder Interferometer. Wir haben uns für eine Impulsmessung entschieden und können ein Interferenzmuster in den Detektorkorrelationen beobachten. Über den Weg des Photons durch das Interferometer haben wir keine Information.

Andrerseits können die Detektoren in eine Position *vor* dem Strahlteiler gebracht werden (1',2'), um so den Weg des Photons messen zu können → jede Interferenz verschwindet.

Wir können in diesem Gedankenexperiment zwischen einem Interferenz- und einem

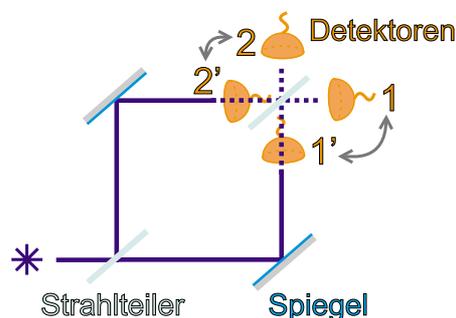


Abbildung 4.38.: Ein Vorschlag für ein Experiment mit verzögerter Entscheidung

⁴⁸C.F. von Weizsäcker, Z.Phys. 118, 489 (1941)

⁴⁹C.F. von Weizsäcker, Z.Phys. 70, 114 (1931)

⁵⁰A. Zeilinger, J.Phys. 45, 213 (1984)

⁵¹D.M. Greenberger, Rev.mod.Phys. 55, 875 (1983)

⁵²W.C. Wickes, C.O. Alley, O. Jakubowicz, A Delayed-Choice Quantum Mechanics Experiment, Univ. Maryland working paper (1981)

⁵³A.J. Zajonc, Phys.Lett. 96A, 61 (1983)

⁵⁴T. Hellmuth, H. Walther, A. Zajonc, W. Schleich, *Delayed - Choice Experiments in Quantum Interference*, Phys.Rev. A 35, 2532 (1987)

”Welcher-Weg” Experiment wählen und diese Entscheidung hinauszögern bis zu einem Zeitpunkt, an dem sich das Photon schon hinter dem ersten Strahlteiler befindet.

In einer Beschreibung des Phänomens von Bohm et.al.⁵⁵ versuchen die Autoren die Vergangenheit des Systems als unabhängig von der Messung existierend miteinzubeziehen (wie das für die klassische Welt selbstverständlich Gültigkeit besitzt, jedoch gänzlich der Kopenhagener Interpretation widerspricht!):

Das Teilchen hat in dieser Beschreibung einen definitiven Ort und Impuls, ist aber zusätzlich mit einem Feld untrennbar verbunden, das der Schrödingergleichung gehorcht und dementsprechend die möglichen Wege für das Photon vorgibt.

Im Experiment in Abb. 4.38 würde dann dieses Feld beide Wege benützen, aber nur in einem der beiden Wege befände sich das Teilchen.

Führten wir eine Welcher-Weg Messung durch, so spräche jener Detektor an, in dessen Weg sich das Teilchen ”unabhängig von der Art der Messung befand” und - durch die Messung jetzt bestätigt - befindet.

Bei einer Interferenzmessung würde das Wellenfeld von beiden Teilarmen des Interferometers überlagern und gäbe so die Wege und die Aufenthaltsmaxima und -minima für das Teilchen vor.

In dieser Vorstellung befand sich das Teilchen unabhängig von der Art der Messung immer in genau einem Teilarm des Mach-Zehnders.

In der **Kopenhagener Interpretation** sieht die Sache völlig anders aus:

J.A. Wheeler⁵⁶ diskutierte das Problem der verzögerten Entscheidung für die Art der Messung auf den Prinzipien von Bohrs Komplementarität und dessen Auffassung einer unzerstrennbaren Einheit von Meßapparat und Meßobjekt. Die Vergangenheit des Systems ist *nicht* unabhängig von der Messung oder der Entscheidung für die Messung der einen oder anderen komplementären Variablen: *”Universe does not ’exist out there’ independently of all acts of observation. It is in some strange sense a participatory Universe. The present choice of the mode of observation...should influence what we say about the past..., the past is undefined and undefinable without the observation.”*

Nach Bohr sind es gerade Argumente wie bei den Diskussionen über den Einfluß einer verzögerten Entscheidung auf die Vergangenheit des Systems, die uns vor Augen führen, daß Quantenphänomene nicht in verschiedene Einzeleffekte unterteilt werden können (*”it is just arguments of this kind which recall the impossibility of subdividing quantum phenomena...”*⁵⁷) sondern als *Ganzes* betrachtet werden müssen. Es gibt keine realen Eigenschaften eines Teilchens unabhängig von einer Messung, die Diskussion der Wege der Teilchen vor der Messung ist sinnlos; wir haben nur die Wahl zwischen verschiedenen komplementären Meßapparaturen und korrespondierenden Effekten, unabhängig vom Zeitpunkt der Entscheidung für eine Messung.

⁵⁵D.J. Bohm, C. Dewdney, B.H. Hiley, *A Quantum Potential Approach to the Wheeler Delayed-choice Experiment*, Nature 315, 294 (1985)

⁵⁶J.A. Wheeler, in *Mathematical Foundations of Quantum Theory*, p. 9, ed. A.R. Marlow, Ac. NY (1978)

⁵⁷N. Bohr, in *Quantum Theory and Measurement*, ed. J.A. Wheeler, W.H. Zurek, Princeton Univ. Press (1983)

4.6.1. Ein Heisenbergmikroskop mit verzögerter Entscheidung für Orts- oder Impulsmessung

Um in unserem Experiment eine verzögerte Entscheidung für die Messung der beiden komplementären Variablen Ort und Impuls zu ermöglichen, setzen wir hinter die Heisenberglinse kurz vor der Brennebene der Linse einen Strahlteiler, siehe Abb. 4.39.

In jedem Ausgang des Strahlteilers ist eine Detektionseinheit aufgebaut: einer davon in der Brennebene der Linse (D1), der zweite Detektor in der Abbildungsebene ($\overline{D1}$).

Führt man das Muster mit Doppelspalt-Detektors D2 ab, so können in einer Messung beide Koinzidenzzählraten, D2&D1 und D2& $\overline{D1}$, aufgenommen werden. Je nach zufälliger Entscheidung am Strahlteiler für Transmission oder Reflexion erhält man einen Koinzidenzklick für eine der beiden Zählraten (niemals jedoch für beide Zählraten gleichzeitig!).

Der Abstand zwischen dem LiIO_3 Kristall und der Photodiode der Detektoreinheit D2 beträgt 34 cm. Die Distanz ist sehr viel kleiner als die 105 cm vom Kristall zu unserem Entscheidungspunkt (dem Strahlteiler). Das Idler Photon hat den Doppelspalt passiert und ist schon detektiert, bevor das Signal Photon am Strahlteiler ankommt und die Art der Messung zufällig durch Transmission oder Reflexion des Photons entschieden ist.

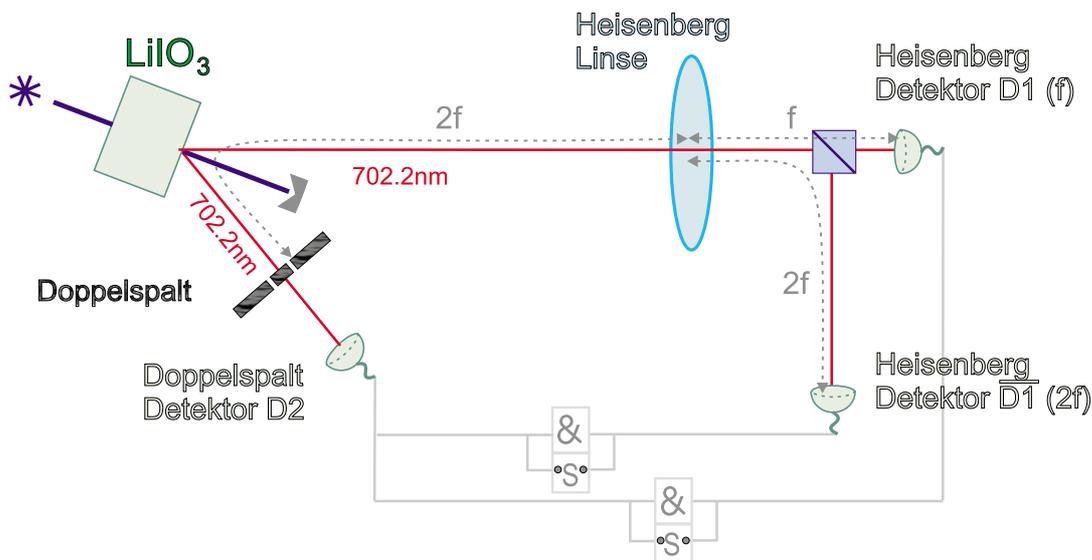


Abbildung 4.39.: Der Aufbau unseres Experimentes mit verzögerter Entscheidung: der Aufbau ist völlig analog zu jenem für das Heisenbergmikroskop. Allerdings wird der Aufbau hinter der Linse modifiziert, mittels eines Strahlteilers nach der Heisenberglinse und eines zusätzlichen Detektors

Betrachtet man die Daten des Heisenbergmikroskops - die bei Impulsmessung ein Interferenzmuster, bei Ortsmessung ein Beugungsmuster ohne jede Interferenz aufweisen - so könnte man sich fragen, wie das Idler Photon (auf der Seite des Doppelspalts) wissen kann, ob es an der Position eines Interferenzminimums landen darf oder nicht, wenn die Entscheidung für die Art der Messung noch gar nicht gefallen ist.

Das Paradoxon löst sich auf wenn man Meßapparat und Meßobjekt als ein Ganzes betrachtet. Der Zwei-Photonen Zustand ist ein untrennbares Ganzes und mehr als "zwei Teilchen". Nur bei Koinzidenzdetektion mißt man den Zwei-Photonen Zustand und nur hier kann die Abhängigkeit des Interferenzkontrastes von der Art der Messung beobachtet werden.

Die Einzelzählraten sind konstant (in den Detektoren D1 und $\overline{D1}$) bzw. weisen aufgrund der

Existenz des Doppelspaltes im Strahl ein Beugungsmuster auf (im Doppelspalt-Detektor D2), jedoch keine Interferenz (die Quelle ist inkohärent).

Es interessieren uns die Daten der beiden Koinzidenzzählraten im Vergleich zu den früher aufgenommenen Daten. Läßt sich irgendein Unterschied erkennen?

Zusätzlich führen wir das Experiment für 2 verschiedene Konfigurationen durch:

1. Größe D1: $75 \mu\text{m}$ Größe $\overline{\text{D1}}$: $75 \mu\text{m}$ Größe D2: $35 \mu\text{m}$
2. Größe D1: $75 \mu\text{m}$ Größe $\overline{\text{D1}}$: $500 \mu\text{m}$ Größe D2: $35 \mu\text{m}$

Bei der Messung mit einer kleinen detektierenden Fläche der Detektoreinheit $\overline{\text{D1}}$ in der Abbildungsebene der Linse kann nur das Licht von dem einem oder dem anderen Spalt des Doppelspaltes detektiert werden. Die Reduktion des Interferenzkontrastes auf Null ist trivial.

Führt man dieselbe Messung mit einem Detektor mit so großer Fläche durch, daß wir nicht mehr unterscheiden können, durch welchen Spalt das Geschwisterphoton gegangen ist (das Licht von beiden Spalten ist auf der empfindlichen Fläche des Detektors), so können wir den Weg des Photons nicht mehr eruieren.

Sehen wir jetzt wieder Interferenzen, oder reicht die *prinzipiell* vorhandene Unterscheidbarkeit der beiden möglichen Wege aus, um jede Interferenz zu zerstören?

Die entsprechenden Daten findet man in den Abb. 4.40, 4.41.

Im ersten Bild sehen wir für die Ortsmessung das erwartete Beugungsmuster eines Spaltes, identisch mit den Messungen zum Heisenbergmikroskop.

Die Position des Heisenberg-Detektors $\overline{\text{D1}}$ wurde für eine weitere Messung um die Spaltbreite d verschoben und das Beugungsbild des zweiten Spaltes aufgenommen. Für jede der beiden Kurven führt nur Licht von einem der zwei Spalten zu einem Koinzidenzclick. Die Tatsache, daß keine Interferenzen zu sehen sind, ist aus diesem Grunde trivial.

Bemerkenswerterweise beträgt der Überlapp der beiden Beugungsmuster 94,5% der Gesamtfläche. Die Beugungsbilder von den beiden Spalten überlagern zu einem großen Teil, was unsere Frage nach einer Wiederherstellung der Interferenz für eine große Detektorfläche noch unterstützt.

Die in denselben Messungen aufgenommenen korrespondierenden Datensätze für die Impulsmessung (D2&D1) zeigen zwei identische Interferenzmuster. Der Heisenberg-Detektor D1 wurde nicht verschoben, die Verschiebung des Heisenberg-Detektors $\overline{\text{D1}}$ hat *keinen* Einfluß auf dieses Meßergebnis!

Der Kontrast der Modulationen beträgt $98.1 \pm 1.3\%$ und $96.7 \pm 2.1\%$. Diese Werte sind identisch mit jenen aus unseren früheren Messungen.

Die verzögerte Entscheidung hat nicht den geringsten meßbaren Einfluß auf die Modulationsstruktur und den Kontrast.

Die Antwort des Experimentes auf unsere Frage nach einer Rückkehr der Interferenz für einen großen Detektor (hier: $500 \mu\text{m}$) sehen wir in Abb. 4.41, sie ist *NEIN*. Alleine schon die prinzipielle Möglichkeit, den Weg der Teilchen festzustellen, reicht aus um jede Interferenz zu zerstören (und dies, obwohl das Licht von den beiden Spalten überlagern kann!). Nur weil die Detektoreinheit nicht adäquat gewählt wurde, erhält man deswegen das Interferenzmuster nicht zurück.

Für die Impulsmessung sehen wir wieder ein Interferenzmuster mit gleichem Kontrast.

In Abb. 4.42 sind die zwei Datensätze mit zwei verschiedenen Positionen des Heisenberg-Detektors D1 (0 und π) aufgetragen. Man beobachtet in den Koinzidenzzählraten D2&D1

- wie aufgrund der Theorie zu erwarten - eine Verschiebung des Maximums des Interferenzmusters um π .

Für die korrespondierenden Koinzidenzzählraten $D2\&\overline{D1}$ der Ortsmessung (mit großem Detektor) ändert sich nichts, sie sind unabhängig von den verschiedenen Positionen des Heisenberg-Detektors D1.

Zusammenfassend haben wir nicht den geringsten, experimentell beobachtbaren Unterschied zwischen Daten, bei denen die Art der Messung verzögert entschieden wurde, und jenen Daten mit fixer Bestimmung der Messung feststellen können. Die Messungen bestätigen die Kopenhagener Interpretation der Quantenmechanik.

Die Möglichkeit der verzögerten Entscheidung hat weitgehende Konsequenzen für unsere Vorstellung von der Vergangenheit und erinnert uns nach Wheeler, daß... *"the past has no existence except as it is recorded in the presence."*

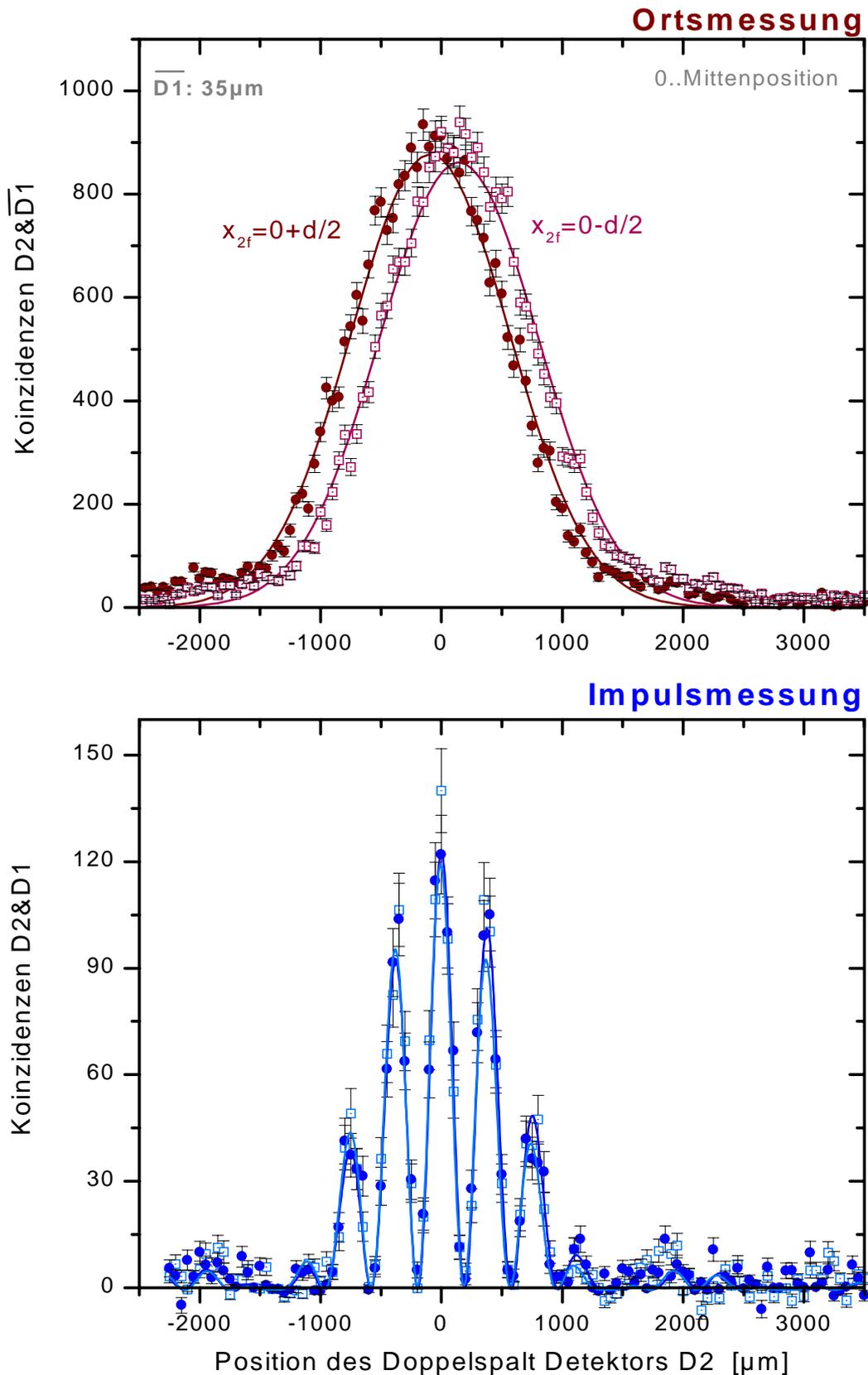


Abbildung 4.40.: Beide Datensätze wurden in einer Messung (Doppelspalt-Detektor D2 fährt) aufgenommen: für die Ortsmessung erhalten wir die zwei Beugungsmuster der beiden Spalten für zwei verschiedenen Positionen des Heisenberg-Detektors $\overline{D1}$; für die Impulsmessung können wir ein Interferenzmuster mit unverändertem Kontrast beobachten, die Verschiebung von $\overline{D1}$ hat absolut keinen Einfluß.

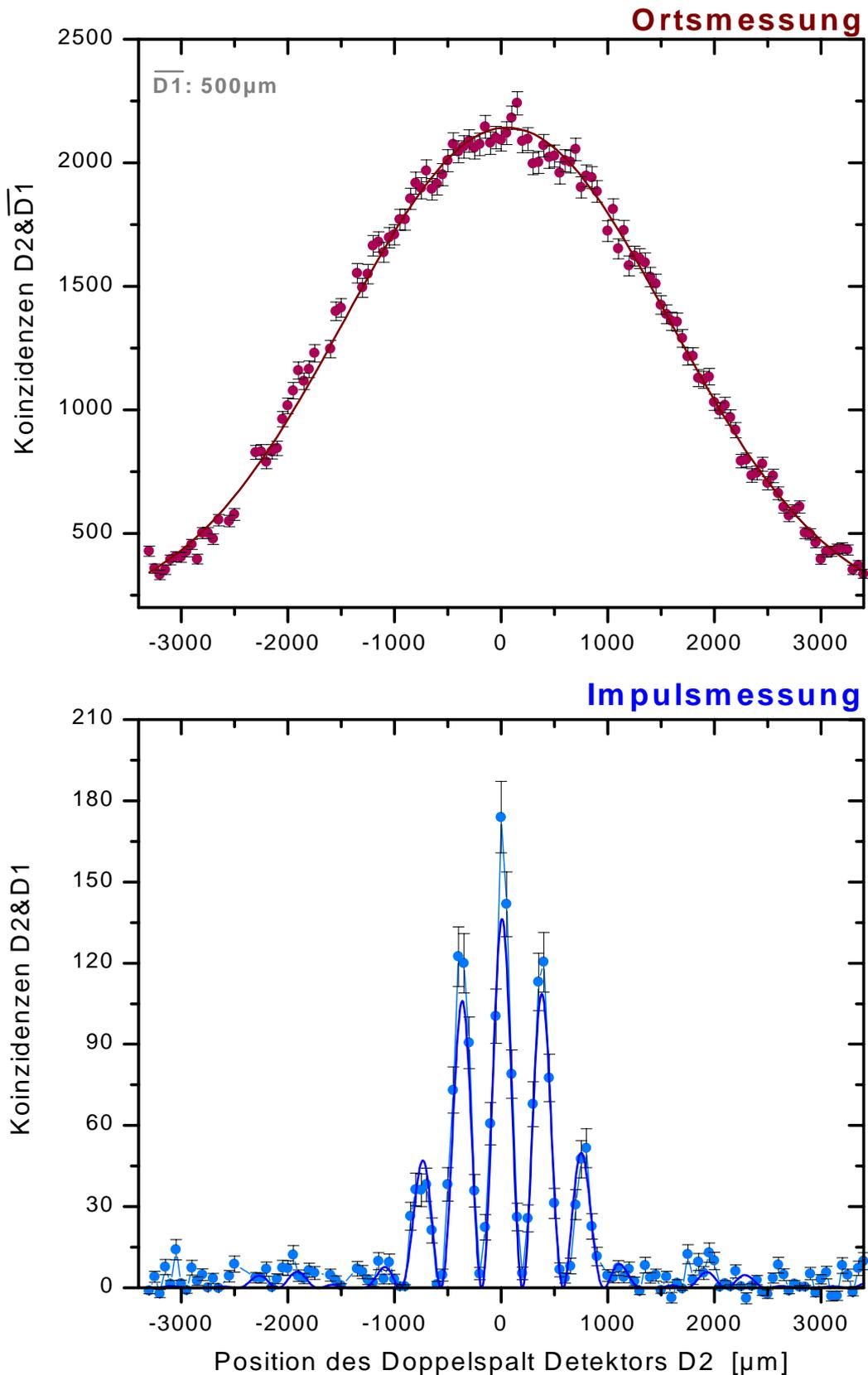


Abbildung 4.41.: Beide Datensätze wurden in einer Messung (Doppelspalt-Detektor D2 fährt) aufgenommen; trotz Auslöschung der "Welcher-Weg" Information durch Verwendung einer zu großen Detektorfläche (die Spalten können nicht mehr aufgelöst werden) weist der obere Datensatz für die Ortsmessung keine Interferenzen auf (!); im unteren Plot für die Impulsmessung sehen wir die erwarteten Intensitätsmodulationen.

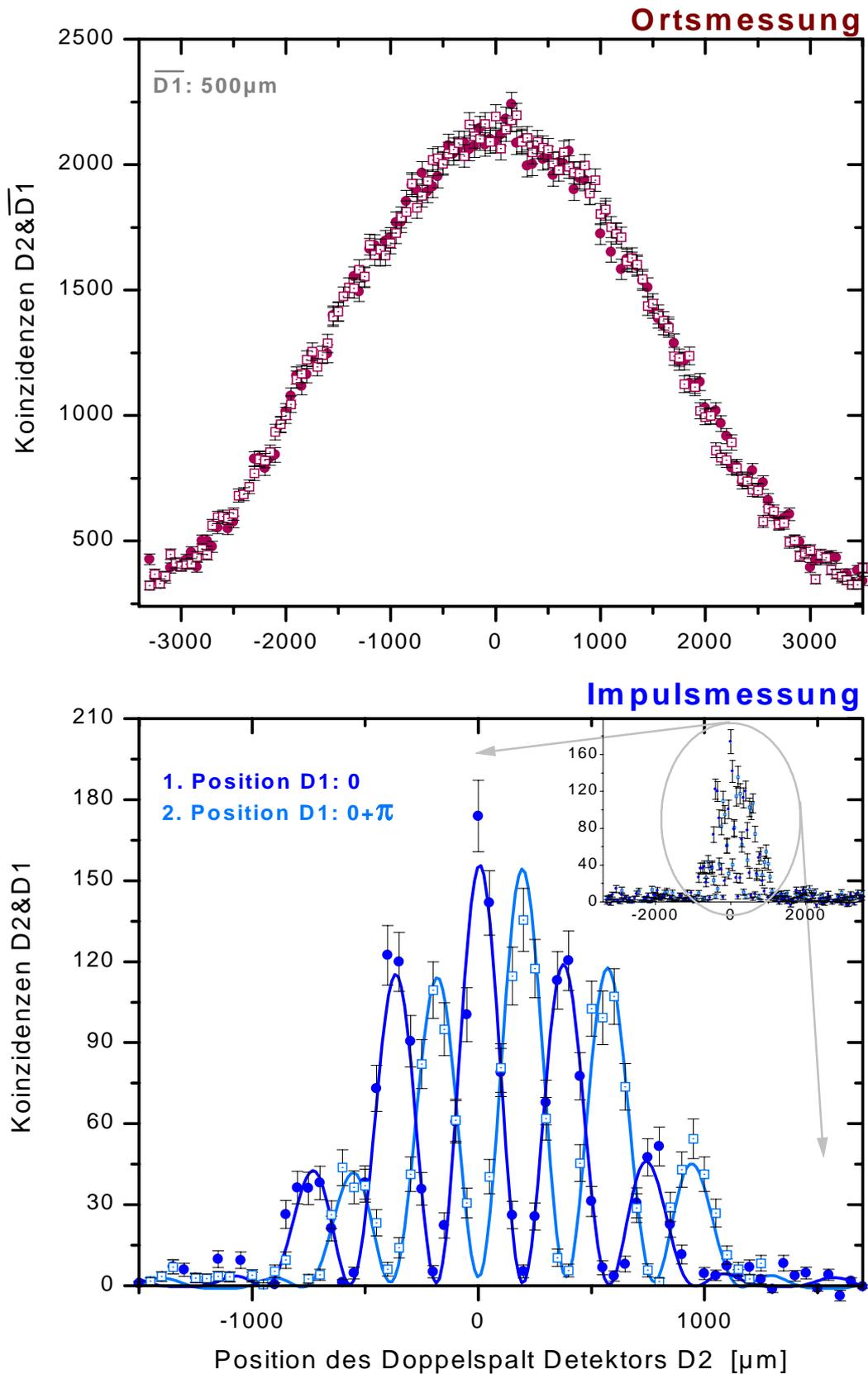


Abbildung 4.42.: Beide Datensätze wurden in einer Messung (Doppelspalt-Detektor $D2$) aufgenommen: der obere Plot für die Ortsmessung zeigt wieder ein Beugungsmuster (große Detektorfläche); in den unteren Datensätzen (Gesamtbild ist klein rechts oben abgebildet) für die Impulsmessung sehen wir zwei um π verschobene Interferenzmuster für die zwei (um π) verschiedenen Positionen von Heisenberg-Detektor $D1$.

5. Zwei-Photonen Interferenz bei Dynamischer Beugung

In diesem Kapitel werden wir uns mit dem Phänomen der Dynamischen Beugung und den von uns erstmals beobachteten Effekten bei der Beugung von Zwei-Photonen Zuständen beschäftigen.

In allen bisherigen Experimenten sowohl zur Analyse der Beugungs- und Streueffekte als auch in Anwendungen von perfekt-periodischen Strukturen, z.B. als interferometrischer Strahlteiler, verwendete man Röntgenstrahlen^{1,2} oder Neutronen^{3,4} und untersuchte die resultierenden Intensitätsverteilungen (Effekte 1. Ordnung).

Wir interessieren uns hier für Phänomene, die bei der dynamischen Beugung komplizierterer Zustände - wie der korrelierten Photonenaare - auftreten: durch Untersuchung der Korrelationen zwischen den Detektoren (Koinzidenzmessung) konnten wir Interferenzen 2. Ordnung und neue Effekte für die Pendellösungslänge beobachten. Die Ergebnisse wurden 1995 in Phys. Rev. A, Rapid Communications, veröffentlicht⁵.

5.0.2. Allgemeines zur Dynamischen Beugungstheorie

In den meisten in der Natur vorkommenden Kristallen ist eine perfekte Kristallstruktur nur auf kleine, mosaikhafte verteilte Volumenelemente beschränkt.

Untersucht man Beugungseffekte an solchen Strukturen, so kann die Streuung von jedem einzelnen kleinen Volumen unabhängig von den Streufeldern anderer Regionen betrachtet werden. Man erhält als Richtungen der Wellenvektoren jene des durchgehenden und jene Richtung des an den Netzebenen reflektierten Strahles, korrigiert um den Brechungsindex des Kristalles.

Der mathematische Formalismus, der solche Effekte beschreibt, nennt sich "kinematische (oder geometrische) Beugungstheorie". Er eignet sich allerdings nur für Kristalle mit derart kleinen kohärenten Volumenelementen oder derart schwachen Reflexionen an den Netzebenen, daß kein Energieaustausch zwischen den einzelnen Strahlen im Kristall stattfinden kann.

Ganz anders ist die Situation für große Kristalle mit perfekten Strukturen.

Aufgrund der großen kohärenten Bereiche kann hier das Zusammenspiel der Streuwellen von

¹P.B. Hirsch, Acta Cryst. 5, 176 (1952)

²N. Kato, J.Phys.Soc. Japan 7, 397 (1952)

³J. Arthur, C.G. Shull, A. Zeilinger, Phys.Rev. B 32, 5753 (1987)

⁴H. Rauch, D. Petraschek, in *Neutron Diffraction*, ed. by H. Dachs, Springer, Berlin (1978)

⁵B. Dopfer, P.G. Kwiat, H. Weinfurter, A. Zeilinger, M.A. Horne, *Brillouin Scattering and Dynamical Diffraction of Entangled Photon Pairs*, Phys.Rev. A 52, R2531 (1995)

den verschiedenen Punkten des Kristalles nicht mehr vernachlässigt werden. Das gesamte Wellenfeld besteht aus kohärent gekoppelten Feldern und muß als eine Einheit betrachtet werden. Für diese Kopplung, Ursache aller 'dynamischen Beugung'effekte (wie z.B. "anomale Transmission" oder "Pendellösung"⁶), zeichnet die Periodizität des Gitters verantwortlich. Die resultierenden Intensitäts- und Interferenzeffekte können nur durch den mathematischen Formalismus der Dynamischen Beugung beschrieben werden⁷.

Erste Arbeiten zur Entwicklung der dynamischen Theorie (beruhend auf Röntgenstrahlbeugung) stammen von Darwin⁸, Ewald⁹ und von Laue¹⁰. Eine ausführliche Diskussion der Streuung und Beugung von Röntgenstrahlen in einem perfekten Kristall stammt von Batterman und Cole¹¹.

Zur Verwirklichung solcher perfekt-periodischer Strukturen können auch stehende Lichtwellen oder akustische Wellen in verschiedensten Materialien verwendet werden. Die Wechselwirkungen zwischen Licht und Schallwellengittern wurde erstmals 1922 von Brillouin¹² vorhergesagt und 1932 von Debye und Sears¹³ experimentall verifiziert. Eine weitere Analyse des Effektes findet man bei Born und Wolf¹⁴.

5.1. Dynamische Beugung von Licht an akustischen Wellen

Wird eine Schallwelle in ein Medium induziert, erzeugen die hervorgerufenen Dichtemaxima und -minima aufgrund des photoelastischen Effektes Brechungsindexmodulationen von derselben Periode. Das Resultat ist ein dynamisches, zeitlich veränderliches Indexgitter.

Wir behandeln hier nur den für uns relevanten "Lauefall": die Einfallsoberfläche steht senkrecht auf die Modulationsstruktur, die Oberflächen des Kristalles sind parallel zueinander.

5.1.1. Ausgangspunkte der Theorie

Der Einfluß der akustischen Welle auf die optischen Eigenschaften des Mediums führt über die Beziehung $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}$ zu Maxwells Gleichungen in einer Form

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (5.1)$$

⁶C.G. Shull, Phys.Rev.Lett. 21, 1585 (1968)

⁷nur zur Bestimmung der Positionen der Maxima in den Ausgangsstrahlen ist auch die kinematische Theorie ausreichend

⁸C.G. Darwin, Phil.Mag. 27, 315 (1914); 27, 675 (1914)

⁹P.P. Ewald, Ann.Phys. 49, 1 (1916); 49, 117 (1916); 54, 519 (1917)

¹⁰Ergeb. Exakt. Naturw. 10, 133 (1931); erschienen in Buchform, *Röntgenstrahl Interferenzen*, 2nd. ed. Akad. Verlag, Frankfurt (1960)

¹¹B.W. Batterman, H. Cole, *Dynamical Diffraction of X Rays by Perfect Crystals*, Rev.Mod.Phys. 36, 681 (1964)

¹²L. Brillouin, *Diffusion de la lumiere et des rayons X par un corps transparent homogene*, Ann.Physique 17, 88 (1922)

¹³P. Debye, F.W. Sears, *On the Scattering of Light by Supersonic Waves*, Proc.Nat.Acad.Sci. U.S. 18, 409 (1932)

¹⁴M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Kap. XII (*Diffraction of Light by Ultrasonic Waves*), Pergamon Press, NY (1965)

Der zusätzliche Term (Störterm) $\Delta \mathbf{P}$ ist proportional zur Änderung der Polarisierbarkeit im Medium und beschreibt die durch die Schallwelle induzierte periodische Brechungsindexänderung. Der zugrundeliegende Effekt ist der "photoelastische Effekt".

Der photoelastische Effekt

Eine akustische Welle löst in einem Kristall Vibrationen der Atome (Moleküle) um ihre Gleichgewichtslage aus. Die Verbindung zwischen der mechanischen Versetzung und ihren Auswirkungen auf die optischen Eigenschaften des Kristalles, wie Polarisierbarkeit und Permittivität, werden wir im Folgenden genauer betrachten.

Gehen wir von einer ebenen Schallwelle aus, die in Richtung \mathbf{r} mit einer Geschwindigkeit v_{ac} und einer Wellenlänge $\Lambda_{ac} = \frac{2\pi c}{\Omega_{ac}}$ durch den Kristall läuft, so erleiden die Atome relative Verschiebungen $s(\mathbf{r}, t)$ mit einer cosinusförmigen Periode gleich

$$s(\mathbf{r}, t) = S \cos(\Omega_{ac}t - \mathbf{K}_{ac} \cdot \mathbf{r}) \quad \left(= \frac{S}{2} e^{i(\Omega_{ac}t - \mathbf{K}_{ac} \cdot \mathbf{r})} + c.c. \right) \quad (5.2)$$

der Periode der Schallwelle. \mathbf{K}_{ac} ist der akustische Wellenvektor und S die Amplitude¹⁵. Die Änderung des Brechungsindex n (n in Abwesenheit der Schallwelle) ist charakterisiert durch einen materialtypischen Tensor \wp , dessen Form von der Symmetrie des Mediums abhängt

$$\Delta\left(\frac{1}{n^2}\right) = \wp s(\mathbf{r}, t) \rightarrow \Delta n = -\frac{1}{2} \wp n^3 s(\mathbf{r}, t)$$

Die Änderung des Brechungsindex ist (zumindest in den hier relevanten Fällen) proportional zur relativen Versetzung der Atome aus ihrer Gleichgewichtslage, $s(\mathbf{x}, t)$. Der Kristall besitzt einen zeitlich veränderlichen, inhomogenen Brechungsindex in Form der akustischen Welle

$$n(\mathbf{r}, t) = n - \Delta n_0 \cos(\Omega_{ac}t - \mathbf{K}_{ac} \cdot \mathbf{r}) \quad (5.3)$$

mit $\Delta n_0 = \frac{1}{2} \wp n^3$. Die Distanz zwischen zwei Indexmaxima ist bestimmt durch die Schallwellenlänge, Λ_{ac} . Sie ist das Analogon zur Distanz zweier Netzebenen in einem perfekt-periodischen Kristall.

Wenn man die Beziehung zwischen Amplitude und Intensität der Schallwelle verwendet, $I_{ac} = \frac{1}{2} \rho v_{ac}^3 S^2$ (mit ρ gleich der Kristalldichte), erhält man für Δn_0

$$\Delta n_0 = \sqrt{\frac{1}{2} M I_{ac}} \quad \text{mit } M = \frac{\wp^2 n^6}{\rho v_{ac}^3} \quad (5.4)$$

M ist ein materialspezifischer Parameter, der die Effektivität angibt, mit der Schall die optischen Eigenschaften des Mediums verändern kann. Er ist ein Maß für die Stärke des photoelastischen (und akusto-optischen) Effekts.

Mit $\varepsilon \approx n^2$ und der Beziehung $\mathbf{P}_i = -\varepsilon \mathbf{E}_i + \varepsilon_{ij} \mathbf{E}_j$ kann man die Verbindung zwischen den Brechungsindexänderungen und der Änderung in der Polarisierbarkeit \mathbf{P} herstellen.

$$\Delta \mathbf{P}_i = \Delta \varepsilon_{ij} \mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t) = -\varepsilon \varepsilon_i \varepsilon_j \wp s(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t)$$

¹⁵B.E.A. Saleh, M.C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, Kap. 20 *Acousto-Optics*, J. Wiley & Sons Inc., NY (1991)

Wenn wir diesen Term in unsere Maxwellgleichungen einsetzen, könnte man sofort als Lösungsansatz für die Felder innerhalb des Kristalles eine Fourierzerlegung über die Gittervektoren des Indexgitters schreiben - analog zu den Blochfunktionen in der Festkörperphysik. Daraus erhält man ein unendliches Gleichungssystem, das allerdings nur schwer lösbar ist. Wenn wir andererseits vorher die Situation genauer analysieren, werden wir unseren Ansatz vereinfachen können:

Die induzierte Schallwelle ist eine laufende ebene Welle mit Cosinusförmiger Periode. Es lassen sich die erlaubten Wellenvektoren innerhalb des Gitters auf zwei reduzieren, die als Bedingung die Impulserhaltung erfüllen müssen (\equiv Braggbedingung). Die zugehörigen Frequenzen erfüllen den Energieerhaltungssatz.

Bragg's Bedingung

Licht, das auf eine periodische Struktur trifft, wird an den parallelen Netzebenen (z.B. eines Kristalles) gebeugt; aufgrund von konstruktiver Interferenz der Strahlen ergibt sich eine Reflexionsbedingung wie jene für Licht, das an einem Spiegel reflektiert wird. Im Fall einer akustischen Welle entsprechen den Netzebenen die induzierten Indexmodulationen.

Dies geschieht an jeder Ebene nur für einen kleinen Bruchteil der Photonen. Die Richtungen der Intensitätsmaxima und -minima sind durch konstruktive und destruktive Interferenz bestimmt.

Ist Λ_{ac} der Abstand zwischen zwei Indexmaxima, λ die Wellenlänge des Photons und $\theta = \theta_B$ der optimale Einfallswinkel der Teilchen, so erhält man als Bedingung für Verstärkung, daß der Wegunterschied zwischen zwei reflektierten Strahlen gleich dem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge sein muß

$$n \cdot \lambda = 2 \cdot \Lambda_{ac} \cdot \sin(\theta_B) \quad , \text{ mit } n \in N. \quad (5.5)$$

Nur für einen Einfallswinkel bestimmt durch Gleichung (5.5) erhält man maximale Intensitäten. Das Ergebnis ist unabhängig von der jeweiligen Geometrie und gilt sowohl für Bragg- (Netzebenen sind parallel zur Kristalloberfläche = Einfallfläche der gestreuten Teilchen) als auch für Lauegeometrie (Netzebenen stehen senkrecht auf die Kristalloberfläche), wie sie wir verwenden werden.

Die Bragg Bedingung folgt direkt aus dem periodischen Aufbau des Gitters, der Braggwinkel ist nur eine Funktion der Schallwellenlänge (\equiv Gitterabstand) Λ_{ac} und der Wellenlänge λ der einfallenden Teilchen. Sie kann auch im reziproken (\mathbf{k} -) Raum formuliert werden.

Ersetzt man in obiger Gleichung Wellenlänge durch Wellenvektor und analog den Abstand der Indexmaxima durch den akustischen Wellenvektor (\mathbf{K}_{ac}), so gilt

$$\mathbf{K}_{ac} = \Delta \mathbf{k} \quad \text{also : } \mathbf{k}_G = \mathbf{k}_0 + \mathbf{K}_{ac} \quad (5.6)$$

Bei Erfüllung der Braggbedingung setzt sich der an einer Netzebene reflektierte Wellenvektor, \mathbf{k}_G , zusammen aus der Summe von einfallenden Wellenvektor, \mathbf{k}_0 , und reziproken Gittervektor, \mathbf{K}_{ac} ($n=1$).

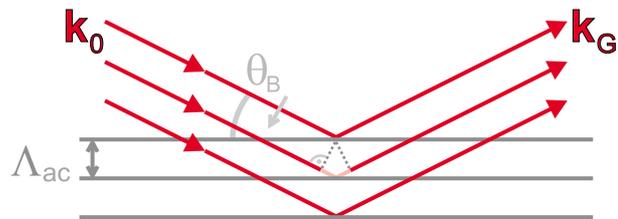


Abbildung 5.1.: Bragg's Bedingung für konstruktive Interferenz

Zeitliche Abhängigkeit des Brechungsindexgitters

Für eine stehende Schallwelle ist die Situation klar: wir erhalten aufgrund der Modifizierung des Brechungsindex ein statisches Gitter, an dem die Photonen gebeugt werden. Die Frequenz des einfallenden Photons, ω_0 , bleibt unberührt und ist gleich der Frequenz des gebeugten Photons, ω_G .

In unserem Experiment wird in einen Kristall eine *laufende* Welle eingepägt → das resultierende Brechungsindexgitter ist zeitlich veränderlich mit einer Frequenz gleich jener der Schallwelle.

Ein Photon, reflektiert an solchen laufenden Ebenen, erfährt einen zusätzlichen Energiekick: Fällt das Photon mit einer Frequenz ω_0 auf den Kristall ein und besitzt eine Geschwindigkeit $v = \frac{c}{n}$ innerhalb des Mediums, dann gilt aufgrund des Dopplereffekts für die Frequenz des reflektierten Photons

$$\omega_G = \omega_0 \left(1 \pm 2 \frac{\mathbf{v}_{ac}}{v}\right) = \omega_0 \left(1 \pm \frac{2n v_{ac}}{c} \sin(\theta_B)\right) = \omega_0 \pm \Omega_{ac}$$

Das \pm berücksichtigt beide Möglichkeiten der Ausbreitungsrichtung der akustischen Welle relativ zur Einfallsrichtung des Photons.

Teilchenbild.- Die Wechselwirkung zwischen Licht und Schallwelle kann analog zum Wellenbild auch durch Kollisionen von Photonen mit Phononen beschrieben werden.

Bei jedem Stoß wird das einfallende Photon und ein Phonon vernichtet, ein gebeugtes Photon erzeugt. Es müssen sowohl Impuls- als auch Energieerhaltung gelten

$$\begin{aligned} \text{Impulserhaltung : } \quad \hbar \mathbf{k}_0 \pm \hbar \mathbf{K}_{ac} &= \hbar \mathbf{k}_G && \equiv \text{Braggbedingung} \\ \text{Energieerhaltung : } \quad \hbar \omega_0 \pm \hbar \Omega_{ac} &= \hbar \omega_G && \rightarrow \text{Frequenzverschiebung} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Die Summe der Impulse des einfallenden Photons und des Phonons vor dem Stoß muß gleich sein dem Impuls des ausfallenden Photons nach dem Stoß. Analoges gilt für die Energie.

Bewegt sich das Phonon in die entgegengesetzte Richtung (Verwendung des $-$), so impliziert dies die Erzeugung eines Photons und eines Phonons bei gleichzeitiger Vernichtung des einfallenden Photons.

Die Ergebnisse des Teilchenbildes sind konsistent mit den Resultaten aus dem Wellenbild.

Zweistrahlnäherung

Mit dem Ansatz einer Fourierzerlegung über alle Gittervektoren in Maxwells Gleichungen würde man auf ein unendliches fundamentales Gleichungsset stoßen.

Für die Situation einer ebenen akustischen Welle reduzieren sich die möglichen Gittervektoren drastisch. Wir können uns auf *eine* aktive Reflexion beschränken, die Felder innerhalb des Kristalles reduzieren sich auf zwei: $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$ in vorwärts gebeugter Richtung mit Wellenvektor \mathbf{k}_0 und $\mathbf{E}_G(\mathbf{r}, t)$ in braggebeugter Richtung mit einem Wellenvektor $\mathbf{k}_G (= \mathbf{k}_0 + \mathbf{K}_{ac})$.

Rechtfertigung der Zweistrahlnäherung. - Die Beschränkung auf nur zwei Amplituden findet für unser Experiment seine Rechtfertigung in der Form der periodischen Struktur: die aufgeprägte akustische Welle ist durch eine ebene Welle beschreibbar mit cosinus-förmiger Periode

$$s(\mathbf{r}) = S_0 + S_1 \cos(\mathbf{K}_{ac} \cdot \mathbf{r})$$

Wenn wir den räumlichen Anteil mit der allgemeinen Fourierzerlegung einer beliebigen

Struktur vergleichen

$$A(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx} dk = A(0) + A(k) e^{ikx} + A(-k) e^{ikx} + e^{2ikx} + \dots$$

sieht man sofort, daß nur die ersten drei Amplituden ungleich Null sind. Alle anderen Fourierkoeffizienten können Null gesetzt werden.

Die Änderung in der Polarisation und die Felder sind direkt proportional zur Modulationsstruktur der akustischen Welle; wir können uns auf zwei beschränken.

Würde man nur die vorwärts gebeugten Felder in Betracht ziehen und ließe *jede* Reflexion außeracht, erhielte man die sogenannte "Ein-Strahl" Näherung. Dieses Modell dient der Beschreibung der Brechung, d.h. für Situationen mit einem Einfallswinkel der Teilchen viel größer / kleiner als der Braggwinkel. Es treten keine dynamischen Beugungseffekte auf.

5.1.2. Ein "Schnellsiedekurs" in Phänomenen der dynamischen Beugungstheorie: Anregungsfehler und Pendellösung

Bevor wir die Reflektivität des akusto-optischen Modulators und die Detektionswahrscheinlichkeiten für unsere in parametrischer Fluoreszenz erzeugten Photonen berechnen, wollen wir die Effekte der dynamischen Beugung etwas genauer studieren.

Wir legen hier weniger Wert auf eine detaillierte mathematische Herleitung (und werden nur die wichtigsten Gleichungen zu einem besseren Verständnis anschreiben), als vielmehr auf die physikalischen Ergebnisse.

In Anlehnung an Batterman und Cole¹⁶ zerlegen wir die Felder unter Erfüllung der Braggbedingung in eine Fourierreihe, $\mathbf{E} = \sum_{\mathbf{K}_{ac}} \mathbf{E}_{\mathbf{K}_{ac}} e^{-2\pi i \mathbf{K}_{ac} \cdot \mathbf{r}}$. Analoges gilt für die akustische Welle mit Fourieramplituden $S_{\mathbf{K}_{ac}}$ und kann in die Dielektrizitätskonstante eingesetzt werden.

Mit Maxell's Gleichungen erhält man ein unendliches lineares Gleichungssystem für die erlaubten Wellenvektoren, das wir aufgrund der Struktur unserer Schallwelle auf zwei Gleichungen reduzieren (Zweistrahlnäherung)

$$\begin{aligned} [k^2 n^2 - (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}_0)] E_0 - k^2 (1 - n_G^2) E_G &= 0 \\ -k^2 (1 - n_G^2) E_0 + [k^2 n^2 - (\mathbf{k}_G \cdot \mathbf{k}_G)] E_G &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

n ist der durchschnittliche Brechungsindex, n_G und $n_{\bar{G}}$ sind die Brechungsindizes für die Wellenvektoren innerhalb des Kristalles und - wie wir sehen werden - leicht verschieden von n .

Das System zweier gekoppelter Gleichungen besitzt nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn seine Determinante Null ist: die Differenz $k^2 n^2 - (\mathbf{k}_{0/G} \cdot \mathbf{k}_{0/G})$ zwischen dem um den durchschnittlichen Brechungsindex korrigierten Vakuumwellenvektor und den Wellenvektoren innerhalb des Kristalles, muß ungleich Null sein! Sie nimmt ganz im Gegenteil einen bestimmten Wert an, den sogenannten "Anregungsfehler".

Wäre die Differenz gleich Null, was bei Nichterfüllung der Braggbedingung der Fall ist, würde man die Transmission der Wellen mit normaler Brechung und Absorption beobachten können.

¹⁶B.W. Batterman, H. Cole, *Dynamical Diffraction of X Rays by Perfect Crystals*, Rev.Mod.Phys. 36, 681 (1964)

Geometrische Konstruktion: Die Ewald Kugel

Ewald Kugel für einen perfekt periodischen Kristall.- Um Anregungsfehler und die erlaubten Wellenvektoren innerhalb einer periodischen Struktur, wie eines perfekten Kristalles, zu veranschaulichen, ist die Konstruktion der Ewald Kugel von großem Nutzen.

Fällt ein Teilchen unter Erfüllung der Braggbedingung ein, so kann man durch Zeichnen einer Kugel mit einem Radius gleich dem Betrag des Vakuumwellenvektor $|\mathbf{k}|$ und mit einem Mittelpunkt im Ursprung des Vektors, die erlaubten Reflexionen finden (siehe Abb. 5.2). Sie sind definiert durch jene Gitterpunkte (\equiv Spitze der neuen Wellenvektoren), die die Kugel schneiden. Es gilt $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{G}$.

Der Winkel zwischen \mathbf{k} und \mathbf{k}' ist der doppelte Braggwinkel, θ_B^{out} , der Mittelpunkt der Kugel ist der "Lauepunkt" L.

Allerdings gilt das alles erst einmal für einen Kristall und im Vakuum. Zur Berücksichtigung des Mediums muß die Konstruktion modifiziert werden.

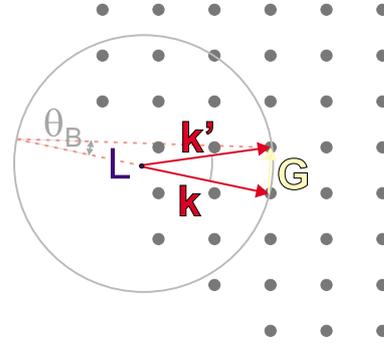


Abbildung 5.2.: Ewald Kugel für einen perfekt-periodischen Kristall (\mathbf{k} im Vakuum)

Anregungsfehler.- Der wesentliche Punkt in Gleichung (5.8) für die Wellenvektoren war die Bedingung, daß die Differenzen zwischen $n\mathbf{k}$ und \mathbf{k}_0 , \mathbf{k}_G nicht Null sein dürfen, $[k^2 n^2 - (\mathbf{k}_0/G \cdot \mathbf{k}_0/G)] \neq 0$. Nur dann ist die Determinante der Gleichung Null; man erhält nichttriviale Lösungen und beobachtet dynamische Beugungseffekte.

Wir definieren die Differenz, den "Anregungsfehler", mit $\xi_{0/G} = \sqrt{\mathbf{k}_0/G \cdot \mathbf{k}_0/G} - k n$. Setzt man in der Determinantengleichung für die Differenzen die neu definierten Parameter ξ_0 und ξ_G ein, erhält man mit $(\sqrt{\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}_0} + k n) \approx 2k$

$$\xi_0 \xi_G = k^2 (1 - n_G^2) (1 - n_G^2) \quad (5.9)$$

die Gleichung für die Dispersionsflächen, die als Ursprung der Wellenvektoren innerhalb des Kristalles dienen. Die Gleichung beschreibt die erlaubten 'Start'punkte oder Anregungspunkte (siehe Abb. 5.3) und damit implizit das gesamte Verhalten der Wellen im Kristall.

Geometrische Konstruktion für ein Schallwellengitter- Geometrisch stellen wir die neu gewonnen Erkenntnisse in einer modifizierten Version unserer Ewald Kugel dar. Mittels der Länge des um den durchschnittlichen Brechungsindex korrigierten Wellenvektors, $n|\mathbf{k}|$, wählen wir einen neuen Mittelpunkt, Q (siehe Abb. 5.3).

Wir zeichnen um die Punkte G und 0 Kugeln mit einem Radius $= n|\mathbf{k}|$. Sie werden sich in Q schneiden und definieren die Dispersionsflächen für den trivialen Fall, $\xi_0 = \xi_G = 0$. Aufgrund der Größenverhältnisse zeichnen wir sie in der Nähe von Q näherungsweise als Geraden (die Strecke \overline{LQ} ist sehr viel kleiner als der Wellenvektor im Kristall; $\overline{LQ} / n|\mathbf{k}| \approx 10^{-5}$ in unseren Experimenten). Die Geraden dienen als Asymptoten für die durch Gleichung (5.9) gegebenen Dispersionsflächen (Hyperbeln): den α -Zweig mit positiven Anregungsfehlern und den β -Zweig mit negativen Anregungsfehlern.

Während der α -Zweig einen Brechungsindex bedingt, der etwas kleiner ist als der durchschnittliche Brechungsindex (Punkte auf diesem Zweig befinden sich näher zum Lauepunkt), ist der Brechungsindex für Wellenvektoren des β -Zweiges etwas größer (Punkte auf diesem Zweig implizieren \mathbf{k} -Vektoren mit größeren Winkeln als jene vom Punkt Q; die Brechungs-

indizes müssen größer sein).

Die zu verschiedenen Einfallsrichtungen gehörenden Anregungspunkte erhält man ausgehend von jenen Punkten P, die auf einer Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius $= \overline{L0}$ liegen (die Kugel kann aufgrund der Größenverhältnisse wieder als Gerade gezeichnet werden und ist

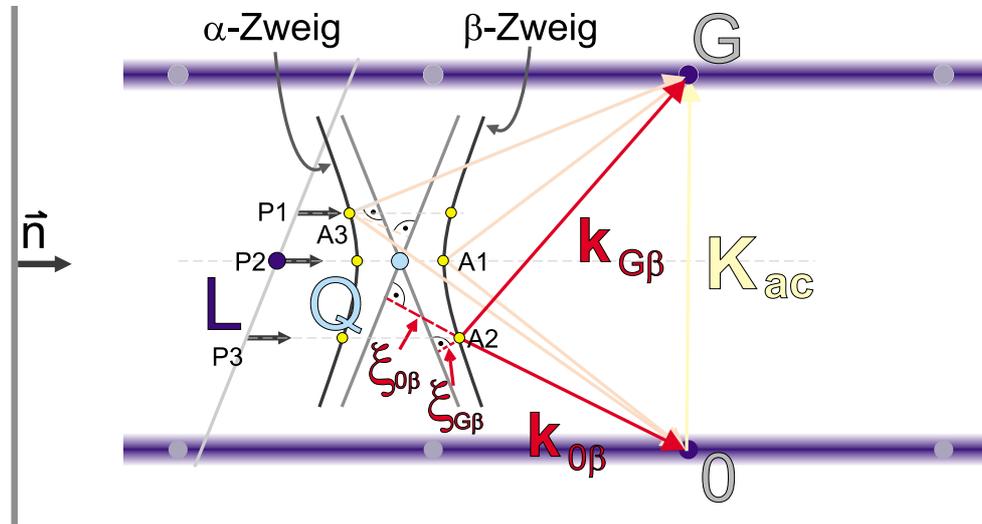


Abbildung 5.3.: Die erlaubten Wellenvektoren innerhalb eines Brechungsindexgitters; für den symmetrische Lauefall (Netzebenen parallel zu \vec{n})

konsequenterweise parallel zur Geraden durch Q).

P_1, P_2, P_3, \dots bilden den Ursprung von Wellenvektoren außerhalb des Mediums, bei exakter Erfüllung der Braggbedingung ist der Punkt P gleich dem Lauepunkt (siehe Abb. 5.3, hier ist $P_2 = L$).

Unter Einhaltung der Randbedingung (Stetigkeit der Tangentialkomponente) gelangt man von den Punkten P aus entlang der Einfallflächen-Normalen, \vec{n} , auf die Hyperbelflächen und erhält auf geometrischem Wege die erlaubten Anregungspunkte A.

Die Anregungsfehler sind definiert als Normalabstand der jeweiligen Lösung auf den Hyperbeln zu den Geraden durch Q.

Feldamplituden und Wellenvektoren.- Die Feldamplituden an jedem beliebigen Punkt im Kristall hängen ab vom Verhältnis der Feldamplituden am Anregungspunkt.

In unserer Abbildung erkennt man als Beispiel drei Anregungspunkte plus den zugehörigen Wellenvektoren.

Im Idealfall der Anregung eines Punktes, der sich im Schnittpunkt einer Hyperbel mit der Symmetrielinie \overline{LQ} befindet, wie z.B. A2, erfüllen die Wellenvektoren:

- exakte Braggbedingung
- $\xi_0 = \xi_G$
- Intensitäten werden 50:50 auf die bragg- und die vorwärts gebeugte Welle aufgeteilt

Für Anregungspunkte weiter entfernt von der Symmetrielinie, wie z.B. A1 oder A3, ist die Braggbedingung nicht mehr exakt erfüllt.

Beginnt man an einem Punkt mit großem, negativem ("mit dem Uhrzeigersinn") $\Delta\theta$, so nähern sich die Hyperbeln den Asymptoten und der Anregungsfehler geht gegen Null, $\xi_0 \rightarrow 0$. Die Determinantengleichung kann nur noch für den trivialen Fall, $E_G = 0$, erfüllt werden. Es existiert nur mehr ein transmittierter Strahl, angeregt auf nur einem Zweig, mit

einem Wellenvektor korrigiert um den durchschnittlichen Brechungsindex (normale Brechung). Für $\xi_G \rightarrow 0$ erhält man keine physikalische Lösung, da dies ein einfallendes Feld mit null Amplitude ($E_0 \rightarrow 0$) bei gleichzeitiger Anregung eines großen gebeugten Feldes implizieren würde.

Nimmt die negative Winkeldifferenz langsam ab, werden Anregungspunkte auf *beiden* Zweigen aktiv mit Feldern E_0 und E_G . Dabei ist $E_0 > E_G$ auf dem α -Zweig und $E_0 < E_G$ auf dem β -Zweig. Die Asymmetrie wird immer kleiner, je mehr $\Delta\theta$ gegen Null geht. Bei exakter Erfüllung der Braggbedingung sind die Amplituden der Felder gleich groß.

Wird die Winkeldifferenz $\Delta\theta$ wieder größer, nun aber positiv, so erhält man analoge Ergebnisse mit einem gerade umgekehrten Verhältnis der beiden Felder.

Phänomen der Pendellösung

Der Energiefluß durch eine Einheitsfläche bzw. der Poynting Vektor eines elektromagnetischen Feldes ist definiert durch $\mathbf{S}_0 = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Durch Nehmen des zeitlichen Mittels fallen die für die Bestimmung der Richtung der Energieflüsse uninteressanten Frequenzterme, $e^{i\omega t}$, weg.

Setzen wir unseren Ansatz für die Felder \mathbf{E} (und analog für \mathbf{H}) ein, erhalten wir unter Voraussetzung der Anregung der Punkte auf beiden Zweigen

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &\approx \frac{1}{2} (|\mathbf{E}_{0\alpha}|^2 \mathbf{s}_0 + |\mathbf{E}_{G\alpha}|^2 \mathbf{s}_G) + \frac{1}{2} (|\mathbf{E}_{0\beta}|^2 \mathbf{s}_0 + |\mathbf{E}_{G\beta}|^2 \mathbf{s}_G) + \\ &\quad + (|\mathbf{E}_{0\alpha}| |\mathbf{E}_{0\beta}| \mathbf{s}_0 - |\mathbf{E}_{G\alpha}| |\mathbf{E}_{G\beta}| \mathbf{s}_G) \cdot \cos(2\pi (\mathbf{k}_{0\alpha} - \mathbf{k}_{0\beta}) \cdot \mathbf{R}) \\ &\approx \mathbf{S}_\alpha + \mathbf{S}_\beta + \mathbf{S}_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (5.10)$$

\mathbf{s}_0 und \mathbf{s}_G sind die Einheitsvektoren in Richtung der Wellenvektoren \mathbf{k}_0 und \mathbf{k}_G .

Die Terme können analysiert werden als drei Energieflüsse: \mathbf{S}_α ist jener Fluß, der generiert wird durch den auf dem α -Zweig angeregten Punkt, analoges gilt für \mathbf{S}_β (siehe Abb. 5.4). Beide sind unabhängig von der Dicke des Kristalles.

Anders ist dies mit $\mathbf{S}_{\alpha\beta}$, dem Kopplungsterm. Der Differenzvektor in der Cosinus-Funktion, $(\mathbf{k}_{0\alpha} - \mathbf{k}_{0\beta}) = \mathbf{k}_n$ steht senkrecht auf die Einfallfläche, $\mathbf{n} \parallel \mathbf{K}_n$, was man aus geometrischen Überlegungen (siehe Abb. 5.3) leicht erkennen kann.

Der Kopplungsterm variiert sinusförmig mit der Dicke des Kristalles und mit einer Periode $l_P = \mathbf{k}_n^{-1}$.

Pendellösung.- Der gesamte Energiefluß durch den Kristall setzt sich zusammen aus den Energieflüssen der beiden Zweige, \mathbf{S}_α und \mathbf{S}_β , die unabhängig sind von der Länge des Kristalles, und einem Kopplungsterm.

Der Kopplungsterm oszilliert cosinusförmig mit einer charakteristischen Periode l_P^{-1} , der "Pendellösungslänge": nach Durchqueren einer Kristalllänge $l = l_P$ wird das einfallende Teilchen wieder rückreflektiert in seine ursprüngliche Richtung.

Die gesamte Energie wird um einen Mittelwert, $\mathbf{S}_\alpha + \mathbf{S}_\beta$, zwischen den Extremalrichtungen

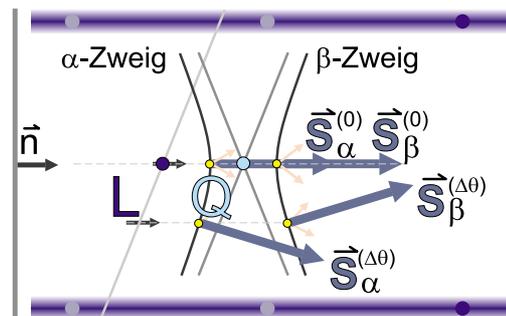


Abbildung 5.4.: Die Energieflüsse \mathbf{S}_α und \mathbf{S}_β im Kristall - für 2 verschiedene Einfallrichtungen

\mathbf{s}_0 und \mathbf{s}_G hin- und hergependelt:

$$\begin{aligned} \cos(2\pi \frac{l}{l_P}) = 1 & \quad l = n \cdot l_P & \rightarrow & \quad \mathbf{S} \propto \mathbf{s}_0 \\ \cos(2\pi \frac{l}{l_P}) = 0 & \quad l = \frac{(2n-1)}{4} \cdot l_P = (n \pm \frac{1}{4}) \cdot l_P & \rightarrow & \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_\alpha + \mathbf{S}_\beta \\ \cos(2\pi \frac{l}{l_P}) = -1 & \quad l = \frac{(2n-1)}{2} \cdot l_P = (n - \frac{1}{2}) \cdot l_P & \rightarrow & \quad \mathbf{S} \propto \mathbf{s}_G \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ist die Dicke des Kristalles ein ganzzahliges Vielfaches der Pendellösungslänge, finden wir die gesamte Intensität im vorwärts gebeugten Strahl. Genau Entgegengesetztes gilt für Kristalldicken eines halbzahliges Vielfachen von l_P : die Intensität befindet sich in bragg gebeugter Richtung.

In der Mittenposition, für eine Kristalllänge gleich $\frac{1}{4}l_P, \frac{3}{4}l_P, \text{etc.}$ ist der Cosinus gerade Null und die Richtung des Gesamtenergieflusses gleich der Summe der beiden einzelnen Energieflüsse des α - und β -Zweiges.

Allerdings gilt dies nur bei exakter Erfüllung der Braggbedingung. Für $\Delta\theta \neq 0$ wird der Energiefluß in Richtung \mathbf{s}_G immer kleiner, je größer die Abweichung des Einfallswinkels des Teilchens vom Braggwinkel ist. Für $E_G \rightarrow 0$ ist er Null, es tritt normale Brechung auf mit einem Energiefluß in Richtung des gebrochenen Strahls.

Unter den Voraussetzungen a.) Anregung von Punkten sowohl auf dem α - als auch auf dem β -Zweig und b.) Kopplung (räumlicher Überlapp) von \mathbf{S}_α und \mathbf{S}_β , beobachten wir ein Pendeln des Gesamtenergieflusses zwischen den Extremalrichtungen \mathbf{s}_0 und \mathbf{s}_G .

Die Analogie zum Energietransfer zweier miteinander gekoppelter Pendel ist nicht zu übersehen und war namensgebend für den Effekt.

Der Borrmann Fächer

Ist das einfallende Feld durch eine ebene Welle beschreibbar mit nur genau einem Wellenvektor, der die Braggbedingung exakt erfüllt, erhält man als Anregungspunkte jene, die auf der Linie \overline{LQ} liegen. Die Anregungsfehler sind gleich groß und damit auch die Felder innerhalb des Kristalles, E_0 und E_G .

Die Ausbreitungsrichtungen der Energieflüsse \mathbf{S}_α und \mathbf{S}_β sind parallel zu den Netzebenen, im symmetrischen Lauefall sind sie parallel zu \vec{n} . Die beiden Energieflüsse sind durch die

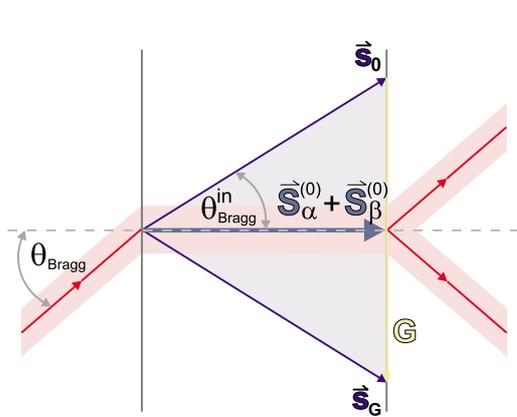


Abbildung 5.5.: Energieflüsse durch den Kristall, "on Bragg"

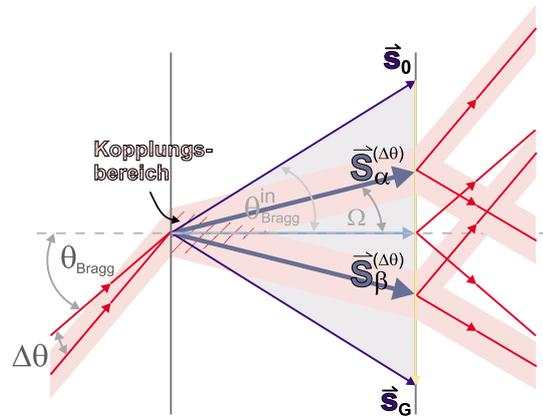


Abbildung 5.6.: Energieflüsse durch den Kristall, "off Bragg" -> Entkopplung

gesamte Dicke des Kristalles aneinander gekoppelt (siehe Abb. 5.5).

Die Pendellösung existiert ohne räumliche Einschränkung und beeinflusst direkt die Ausgangsintensitäten: sie sind eine Funktion der Dicke des Kristalles, l (oder z.B. auch der Tiefe der periodischen Struktur).

Ganz anders ist die Situation für Einfallrichtungen, die nicht exakt die Braggbedingung erfüllen (siehe Abb. 5.6). Die Energieflüsse des α - und des β -Zweiges stehen senkrecht auf die jeweilige Dispersionsfläche (dies bewiesen Kato et. al.¹⁷ durch Anschreiben eines allgemeinen Ausdruckes für einen Vektor senkrecht auf die Dispersionsfläche und Vergleich mit der Richtung des entsprechenden Energieflusses. Für Anregungspunkte auf der Linie \overline{LQ} ist es aus der Definition der Flüsse direkt einsichtig).

Für Einfallrichtungen, bei denen die Braggbedingung nicht exakt erfüllt ist, ist eine räumliche Separation der beiden Energieflüsse möglich. Sie entkoppeln, die Energien der beiden Zweige fließen unabhängig voneinander durch den Kristall. Eine Wechselwirkung findet nur noch knapp unter der Oberfläche statt.

Zusammengefaßt erhält man für den symmetrischen Lauefall:

$$\Delta\theta = 0 : \mathbf{S}_\alpha \parallel \mathbf{S}_\beta \parallel \vec{n}$$

Kopplung der Energieflüsse über den ganzen Kristall

Ausgangsintensitäten abhängig vom Verhältnis $\frac{l}{l_p}$

$$\Delta\theta \neq 0 : \mathbf{S}_\alpha \perp \alpha\text{-Zweig}, \mathbf{S}_\beta \perp \beta\text{-Zweig}$$

Kopplung der Energieflüsse nur in einem kleinen Bereich unter der Oberfläche
→ Entkopplung

Ausgangsintensitäten abhängig vom Verhältnis der Amplituden des jeweiligen Energieflusses, unabhängig vom anderen Energiefluß

5.1.3. Reflektivität / Transmittivität des akusto - optischen Modulators

Im allgemeinen wird ein solches Indexgitter, im Speziellen ein akusto-optischer Modulator (AOM), eingesetzt zur Ablenkung von Licht, als Schalter, als Filter u.a. Wir verwendeten in unseren Experimenten einen AOM zur Beugung der parametrischen Fluoreszenz Photonen(paare) und studierten dynamische Effekte und die Auswirkungen der Beugung eines Zwei-Photonen Zustands auf die Pendellösungslänge.

Zur mathematischen Beschreibung rufen wir uns Maxwells Gleichung (5.1) aus Kap. 5.1.1 wieder ins Gedächtnis zurück. Wir beschränken uns auf zwei Felder innerhalb des Kristalles und betrachten die Situation vorerst mithilfe eines Ansatzes ebener Wellen¹⁸.

$$\mathbf{E}_{0/G}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0/G}(\mathbf{r}) \exp[i(\omega_{0/G} t - \mathbf{k}_{0/G} \cdot \mathbf{r})]$$

Die nötigen Modifikationen für ein realistischeres Bild der Photonen in Form von Wellenpaketen mit endlicher Ausdehnung wollen wir momentan noch außeracht lassen. Sie lassen sich später leicht in unsere Theorie einbauen.

Setzen wir den Ausdruck für die Polarisierbarkeit $\Delta\mathbf{P}_0 \propto \varphi s(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}_G$, den wir mithilfe des photoelastischen Effektes herleiten konnten (s. Gl. (5.5)), in die Maxwellgleichung ein, erhält

¹⁷ N. Kato, Acta Cryst. 11, 885 (1958)

¹⁸ A. Yariv, *Quantum Electronics*, Kap. 14 (*Bragg Diffraction of Light by Acoustic Waves*), J. Wiley & Sons Inc., NY, 3rd. ed. (1989)

man für die rechte Seite der Gleichung

$$\text{rechte Seite} \propto (e^{i(\Omega_{ac} t - \mathbf{K}_{ac} \cdot \mathbf{r})} + c.c.) (e^{i(\omega_G t - \mathbf{k}_G \cdot \mathbf{r})} + c.c.)$$

Betrachtet man die linke Seite der Gleichung, so ist diese proportional zu

$$\text{linke Seite} \propto (e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})} + c.c.)$$

Unter der Forderung einer Synchronisation von $\Delta \mathbf{P}$ mit dem einfallenden Feld stößt man wieder auf die Braggbedingung und Energieerhaltung von Gl. (5.7): die Frequenz ω_0 muß gleich der Summe (Differenz) $\omega_G \pm \Omega_{ac}$ sein und der Wellenvektor \mathbf{k}_0 gleich sein der Summe (Differenz) $\mathbf{k}_G \pm \mathbf{K}_{ac}$ muß.

Andernfalls führen die Exponentialterme zu einer Schwingung mit einer räumlichen Periode $l_c = \frac{\pi}{|\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_G \mp \mathbf{K}_{ac}|}$. Für Wechselwirkungslängen $l > l_c$ mitteln sich die Beiträge der Polarisationsänderung zu Null. Es gibt keine optimale Verstärkung mehr, keine kohärente Wechselwirkung zwischen den einzelnen Teilwellen. Wir könnten keine interessanten Effekte mehr beobachten.

Wenn wir die Ableitungen der ebenen Wellen nach Ort (∇^2) und Zeit ($\frac{\partial^2}{\partial t^2}$) durchführen, erhalten wir unter Berücksichtigung der Beziehung $k_0 = \omega_0 \sqrt{\mu \varepsilon}$ ein System zweier gekoppelter Gleichungen, analog zu Gleichungssystem 5.8 (mit $\varepsilon_0 \approx \varepsilon_G \equiv n^2$ und $\eta = \frac{\pi n^3}{2\lambda} p S$)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{E}_0}{dr} &= i\eta \mathbf{E}_G e^{-i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_G \mp \mathbf{K}_{ac}) \cdot \mathbf{r}} \\ \frac{d\mathbf{E}_G}{dr} &= i\eta \mathbf{E}_0 e^{-i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_G \mp \mathbf{K}_{ac}) \cdot \mathbf{r}} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Das Gleichungssystem beinhaltet die Forderung von Energieerhaltung. Wir wollen nun die Lösungen bei zusätzlicher Erfüllung der Braggbedingung analysieren bzw. auch jene bei Abweichung der Einfallswinkel vom optimalen Winkel.

Braggbedingung erfüllt.- Ist die Braggbedingung exakt erfüllt, $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_G \pm \mathbf{K}_{ac}$, fällt der Exponentialterm weg. Eine Lösung für das gekoppelte Gleichungssystem lautet dann

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_0(0) \cos(\eta r) + i \mathbf{E}_G(0) \sin(\eta r) \\ \mathbf{E}_G(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_G(0) \cos(\eta r) + i \mathbf{E}_0(0) \sin(\eta r) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Zur Berechnung der Reflektivität R des Mediums (z.B. unseres akusto-optischen Modulators), betrachten wir die Situation für ein einfallendes Feld \mathbf{E}_0 und setzen $\mathbf{E}_G(0) = 0$. Aus dem Verhältnis des Quadrates der Amplitude in braggbeugter Richtung zur Gesamtintensität ergibt sich R zu

$$R = \frac{|\mathbf{E}_G(l)|^2}{|\mathbf{E}_0(0)|^2} = \frac{|i\mathbf{E}_0(0) \sin(\eta l)|^2}{|\mathbf{E}_0(0)|^2}$$

und wir erhalten damit

$$R = \sin^2\left(\frac{\pi n^3 p S}{2\lambda} l\right) = \sin^2\left(\frac{\pi l}{\sqrt{2}\lambda} \sqrt{M I_{ac}}\right) \quad (5.14)$$

l ist die Wechselwirkungslänge oder Breite der akustischen Welle. Den materialspezifischen Parameter M und den quadratischen Zusammenhang zwischen akustischer Intensität und

Amplitude definierten wir in Kap. 5.1.1.

R ist jener Anteil der Gesamtintensität, der nach einer Länge l in die braggbeugte Richtung transferiert wird. Für kleine akustische Intensitäten ist er proportional zu I_{ac} , für größere Intensitäten variiert R sinusförmig als Funktion der Wechselwirkungslänge l . Die entsprechende Pendellösungslänge erhalten wir in der Form

$$l_P = \frac{\sqrt{2} \lambda}{\sqrt{M I_{ac}}} \quad (5.15)$$

Sie gibt uns jene Distanz durch das Modulationsgitter an, sodaß ein Photon wieder rückreflektiert wird in seine ursprüngliche Richtung.

Zur Beobachtung des Effektes der Pendellösung kann man entweder die Wechselwirkungslänge l oder aber die Intensität der akustischen Welle variieren, was einfacher zu verwirklichen ist.

Eine ausführlichere Ableitung der Rechnungen dieses Kapitels findet man in Appendix D.

Toleranz in der Braggbedingung → Absinken der Reflektivität

Was passiert, wenn die Braggbedingung nicht exakt erfüllt ist und das Photon unter einem Winkel $\theta = \theta_B \pm \phi$ auf das Brechungsindex-Gitter einfällt?

Hätten wir ein unendlich ausgedehntes Gitter, so ergäbe die Integration über \mathbf{r} ($\parallel \mathbf{K}_{ac}$) zur Findung der Lösungen in Gleichungssystem (5.12) eine Deltafunktion $\delta(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_G \mp \mathbf{K}_{ac})$ und damit die Bedingung für exakte Erfüllung der Impulserhaltung.

Im realen Fall erhalten wir stattdessen eine Sinc-Funktion über die Breite L , proportional zur Wechselwirkungslänge l

$$\begin{aligned} R \propto \text{sinc}^2 \left[(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_G \mp \mathbf{K}_{ac}) \frac{L}{2} \right] &= \text{sinc}^2 \left[(2k \sin(\theta) \mp K_{ac}) \frac{L}{2} \right] \\ &= \text{sinc}^2 \left[(\sin(\theta^{out}) - \sin(\theta_B^{out})) \frac{2\pi L}{\lambda} \right] \end{aligned} \quad (5.16)$$

mit der Beziehung für den Braggwinkel, $\sin(\theta_B^{in}) = \frac{\lambda}{2\Lambda(n)}$ und mit $L = l \tan(\theta_B^{in})$.

Die Polarisationsänderung ΔP oszilliert nicht mehr genau in Phase mit dem einfallenden Feld, Impulserhaltung und Phasenanpassung sind nicht exakt erfüllt.

In Abbildung 5.7 ist die Reflektivität als Funktion des Einfallswinkels θ für den Fall einer ebenen Welle (mit $\mathbf{k}(\theta)$) aufgetragen.

Die Funktion besitzt ihr Maximum bei $\theta = \theta_B$, für $\theta = \theta_B \pm \frac{\lambda}{2L} = \theta_B \pm 7.25 \text{ mrad}$ sinkt sie ab auf Null in Übereinstimmung mit den Limits des Borrmann Fächers ($\frac{\lambda}{2Ln} \approx \theta_B^{in}$).

Wir wählten für den Plot (um der späteren experimentellen Situation nahe zu kommen) einen Braggwinkel im Medium, $\theta_B^{in} = 3.362 \text{ mrad}$, ($\theta_B = 7.73 \text{ mrad}$), eine Schallwellenlänge $\Lambda_{ac} = 45.4 \mu\text{m}$ und eine Wechselwirkungslänge (Breite der akustischen Welle) $l = 15 \text{ mm}$.

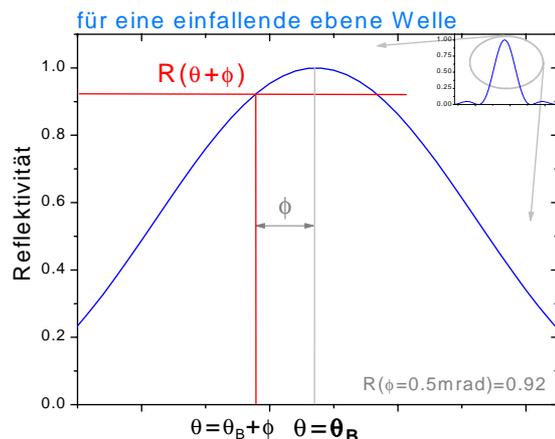


Abbildung 5.7.: Abweichung vom Braggwinkel versus Reflektivität

Die reale Situation ist jedoch etwas anders, im Allgemeinen besteht das einfallende Lichtfeld aus einer *Superposition* ebener Wellen; die Sinc-Funktion muß über alle Einfallswinkel integriert werden.

Wie sieht das für unsere parametrischen Fluoreszenz Photonen aus?

Die möglichen Winkel werden limitiert sein durch die (wenn wir der Beschreibung der experimentellen Gegebenheiten kurz vorgreifen) Irisblenden vor den Detektoren. Mittels der Distanz Kristall-Blenden (D) und dem Durchmesser der Blende selbst (d) erhält man wegen $d \ll D$ eine Winkelverteilung $\Delta\theta_{max} = \frac{d}{D}$.

Die Reflektivität ist proportional dem Faltungintegral

$$R \propto \frac{D}{d} \int_{-\frac{d}{2D}}^{\frac{d}{2D}} \text{sinc}^2\left[\left(\sin(\theta) - \sin(\theta_B)\right) \frac{2L\pi}{\lambda}\right] d\theta \quad (5.17)$$

Der Faktor vor dem Integral dient der Normierung und λ ist die Wellenlänge des Lichtes außerhalb des Kristalles.

5.2. Detektionswahrscheinlichkeiten: Einzelzählraten und Koinzidenzen

5.2.1. Die Einzelzählraten für unsere parametrischen Fluoreszenz Photonen

Wir beleuchten den akusto-optischen Modulator von *einer* Richtung (ein Eingang), der zweite Eingang bleibt unbeleuchtet:

Die Photonen fallen unter dem positiven (oder im zweiten Fall unter dem negativen) Braggwinkel auf den Kristall ein.

Mittels der Lösung aus Gl. (5.13) ergibt sich aus den beiden Anfangszuständen $|\psi_{in}\rangle = |\pm\theta_B\rangle$ für die Endzustände

$$\begin{aligned} |\psi^{in}\rangle = |\theta_B\rangle &\rightarrow \cos\left(\frac{\pi l}{l_P}\right) |\theta_B\rangle + i \sin\left(\frac{\pi l}{l_P}\right) |-\theta_B\rangle \\ |\psi^{in}\rangle = |-\theta_B\rangle &\rightarrow \cos\left(\frac{\pi l}{l_P}\right) |-\theta_B\rangle + i \sin\left(\frac{\pi l}{l_P}\right) |\theta_B\rangle \end{aligned} \quad (5.18)$$

Der ket $|\theta_B\rangle / |-\theta_B\rangle$ beschreibt ein Photon einfallend unter positivem / negativem Braggwinkel; die Sinus- und Cosinus Terme sind die Wahrscheinlichkeitsamplituden ein Photon im entsprechenden Zustand zu finden.

Die Pendellösungslänge l_P ist jene Distanz, die ein Photon im Brechungsindexgitter zurücklegen muß um wieder seinen Anfangszustand zu erreichen. Sie ist definiert in Gl. (5.15).

Durch Projektion der Gleichungen (5.18) auf den Ausgangszustand kann die Wahrscheinlichkeit, ein Photon in einer bestimmten Richtung (in einem der Ausgängen des AOM) zu messen, leicht bestimmt werden

$$P = |\langle \psi^{out} | \psi^{in} \rangle|^2 \quad (5.19)$$

Die Wahrscheinlichkeit, ein Photon, einfallend unter positivem Braggwinkel, beispielsweise hinter dem Kristall in braggbeugter Richtung zu messen, ist

$$P(0, 1) = |{}_{out}\langle -\theta_B | \theta_B \rangle_{in}|^2 \quad (5.20)$$

$$P(0, 1) = |{}_{out}\langle -\theta_B | [\cos(\frac{\pi l}{l_P}) |\theta_B\rangle_{out} + i \sin(\frac{\pi l}{l_P}) |-\theta_B\rangle_{out}]|^2 \quad (5.21)$$

$$= \sin^2(\frac{\pi l}{l_P}) \quad (5.22)$$

ein Ergebnis, das uns eigentlich nicht sonderlich überrascht. Analog kann man auch die drei anderen Detektionswahrscheinlichkeiten berechnen.

5.2.2. Koinzidenzzählraten für die korrelierten Photonenpaare

Analog zur Herleitung der Gleichungen für die Einzelzählraten kann man wieder die bekannte Reflektivität und die Pendellösungslänge des akusto-optischen Modulators heranziehen.

Beide Richtungen (Eingänge) des AOM werden beleuchtet: ein Photon eines korrelierten Paares fällt mit einem Winkel θ_B , das Geschwisterphoton mit einem Winkel $-\theta_B$ auf das Indegitter ein.

Der Zwei-Photonen Zustand, der diese Situation beschreibt, muß als Superposition der beiden möglichen Wege (Richtungen) beschrieben werden

$$|\psi^{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\theta_B\rangle_1 |-\theta_B\rangle_2 + |-\theta_B\rangle_1 |\theta_B\rangle_2) \quad (5.23)$$

Der Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dient zur Normierung.

Der Zustand ist symmetrisch, wenn die beiden Photonen völlig ident sind und daher nicht bestimmt werden kann, welches der beiden Photonen sich auf welcher Seite befindet.

Andererseits, sobald die beiden Photonen durch ihre Frequenz, durch verschiedene Ankunftszeiten am AOM u.a. unterschieden werden können, verhalten sie sich wie zwei voneinander unabhängige Teilchen. Der Anfangszustand ist dann nur noch ein einfaches Produkt der beiden möglichen Richtungen: zur Berechnung der Detektionswahrscheinlichkeiten können die Gleichungen für die Einzelzählraten verwendet werden.

Wir gehen hier von der Ununterscheidbarkeit der beiden Photonen eines Paares aus. Wenn wir Gleichungen 5.18 in die Zwei-Photonen Zustandsfunktion einsetzen, erhalten wir den Ausgangszustand zu¹⁹

$$|\psi^{out}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos(2\frac{\pi l}{l_P}) (|\theta_B\rangle_1 |-\theta_B\rangle_2 + |-\theta_B\rangle_1 |\theta_B\rangle_2) - i \sin(2\frac{\pi l}{l_P}) (|\theta_B\rangle_1 |\theta_B\rangle_2 + |-\theta_B\rangle_1 |-\theta_B\rangle_2) \right] \quad (5.24)$$

Der Ausgangszustand setzt sich zusammen aus einer Superposition zweier Möglichkeiten:

a.) Wir detektieren beide Photonen in demselben Ausgang; die entsprechende Wahrscheinlichkeitsamplitude ist der Sinusterm.

b.) Beide Photonen sind in zwei verschiedenen Richtungen zu finden; die entsprechende Koinzidenzwahrscheinlichkeit berechnet sich zu

$$P(1, 1) = |\cos(2\frac{\pi l}{l_P}) [\langle\theta_B|\theta_B\rangle_1 \langle-\theta_B|-\theta_B\rangle_2 + \langle-\theta_B|-\theta_B\rangle_1 \langle\theta_B|\theta_B\rangle_2]|^2$$

$$P(1, 1) = \cos^2(2\frac{\pi l}{l_P}) \quad (5.25)$$

¹⁹M. Horne, *Dynamical Diffraction or Elementary Wave Mechanics in a Weak Periodic Medium*, Lecture held in Innsbruck (1994)

Die Koinzidenzen variieren mit dem Cosinus in Abhängigkeit von der Pendellösungslänge.

Aber: Sie variieren mit der doppelten Frequenz der Einzelzählraten!

Da nicht unterschieden werden kann, welches der beiden Photonen in welcher Richtung auf das Gitter einfällt, ist das auch für den Ausgangszustand nicht möglich \rightarrow die Pendellösungslänge eines Zwei-Photonen Zustandes ist nur halb so groß wie jene für einzelne Photonen. Schon nach einer zurückgelegten Distanz $l = \frac{L}{2}$ ist ein Zustand erreicht, der durch dieselbe Superposition beschrieben werden muß wie der Anfangszustand der Photonenpaare.

5.3. Eine realistischere Beschreibung der Photonenpaare

Noch einmal zusammenfassend sind die bisherigen Ergebnisse:

a. Fällt ein Photon unter Erfüllung der Braggbedingung auf ein periodisches Medium ein, so werden bragg- und vorwärtsgebeugte Felder erzeugt. Die Kopplung dieser Felder führt zu einer Variation der Zählraten in Abhängigkeit von der Länge der periodischen Struktur bzw. der Tiefe der Struktur (bestimmt durch die akustische Leistung). Die charakteristische Periode des Effekts ist die Pendellösungslänge. Würde man den AOM als black box betrachten, hätten wir einen "Strahlteiler mit variabler Transmittivität / Reflektivität".

b. Fällt ein Zwei-Photonen Zustand auf den AOM ein, eines der beiden Photonen unter dem positiven, das andere unter dem negativen Braggwinkel, beobachten wir wieder den Pendellösungseffekt. Allerdings mit der halben räumlichen Periode der Einzelzählraten! Die Intensitätsverteilung hinter dem AOM variiert wieder sinusförmig mit der akustischen Leistung, aber mit doppelter Frequenz.

Bisher gingen wir zur Vereinfachung der Rechnungen von verschiedenen Annahmen aus.

Wir verwendeten zur Beschreibung der Felder einen ebene-Wellen Ansatz anstatt der realistischeren Beschreibung der Photonen durch Wellenpakete. Für die einzelnen Photonen (\rightarrow Reflektivität) haben wir schon festgestellt, daß das Ergebnis mit dem Faltungsintegral (5.17) korrigiert werden muß.

Im Falle des Zwei-Photonen Zustands nahmen wir stillschweigend an, daß sich die beiden Photonen durch Nichts unterscheiden lassen und deswegen als Superposition über die beiden Einfallrichtungen beschreiben lassen.

Unter ganz bestimmten, idealen Umständen ist das auch richtig. Allerdings müssen die Bedingungen hierfür noch geklärt werden.

Zur Diskussion dieser Fragen ist eine Analyse des von Mandel et.al. 1987 durchgeführten Experimentes unter Zuhilfenahme von Feynman's Regeln für Interferenz sehr hilfreich.

5.3.1. Antikoinzidenz am Strahlteiler

1987 führten Mandel et. al.²⁰ ein Experiment durch zur Bestimmung des Zeitintervalls zwischen den beiden Photonen eines Paares.

Um die endliche zeitliche Auflösung der Detektoren zu umgehen, entwickelten sie eine neue Meßmethode basierend auf den Korrelationen zwischen zwei Detektoren und damit zwischen den *Intensitäten*.

²⁰C.K. Hong, Z.Y. Ou, L. Mandel, *Measurement of Subpicosecond Time Intervals between Two Photons by Interference*, Phys.Rev.Lett. 59, 2044 (1987)

Realisiert wird die Messung durch die Überlagerung eines Zwei-Photonen Zustandes an einem Strahlteiler.

Jeweils ein Photon eines Paares befindet sich in einem der beiden Eingänge; sie werden in den Ausgängen von den zwei Detektoren gezählt (siehe Abb. 5.8).

Durch Ändern der Weglängen für die beiden Photonen können ihre Ankunftszeiten am Strahlteiler relativ zueinander variiert werden. Ist dieses Zeitintervall groß genug gewählt, sodaß die Wellenpakete der beiden Photonen nicht mehr überlappen, sind die beiden Teilchen unterscheidbar und können durch eine multiplikative Zustandsfunktion beschrieben werden.

Die Photonen verhalten sich wie einzelne, unabhängige (klassische) Teilchen²¹: die Detektionswahrscheinlichkeiten an den beiden Ausgängen sind für jedes Teilchen für sich - je nach Verhältnis von Reflektivität (R) zu Transmittivität (T) des Strahlteilers - bestimmt. Sie können nach Feynman berechnet werden als die Summe der Quadrate der Wahrscheinlichkeitsamplituden²².

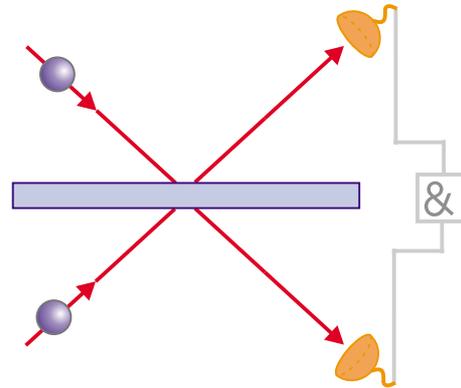


Abbildung 5.8.: Schematischer Aufbau von Mandel's Experiment

Unterscheidbarkeit.-
$$P_{Coinc} \propto |tt|^2 + |ir ir|^2 = |t^2|^2 + |r^2|^2 = 0.5 \quad \text{für } r^2 = t^2 = 0.5$$

Ganz anders verhalten sich die Photonenpaare, wenn sie *gleichzeitig* am Strahlteiler ankommen! Unter diesen Umständen können die beiden Möglichkeiten

- a. beide Photonen werden transmittiert
- b. beide Photonen werden reflektiert

für jeweils ein Photon in einem Detektor nicht mehr unterschieden werden. Der Zustand der beiden Photonen muß als nicht-separierbare Superposition über die beiden Einfallsrichtungen beschrieben werden.

Die Koinzidenzzählrate berechnet sich daher aus dem Quadrat der Summe der Wahrscheinlichkeitsamplituden für die beiden Wege.

Un-unterscheidbarkeit.-
$$P_{Coinc} \propto |tt + ir ir|^2 = |t^2 - r^2|^2 = 0 \quad \text{für } r^2 = t^2 = 0.5$$

Im Falle eines Strahlteilers mit R:T=50:50 sinkt die Koinzidenzintensität auf Null: die zwei Möglichkeiten "beide Photonen transmittiert, tt " und "beide Photonen reflektiert, $ir ir$ " interferieren destruktiv²³. Beide Photonen gehen zusammen entweder den einen Weg oder den anderen Weg.

In Abhängigkeit der Weglängendifferenz kann in Koinzidenzdetektion ein scharfer Einbruch in der Zählrate beobachtet werden. Der Kontrast dieses Einbruchs ist proportional zur Ununterscheidbarkeit der beiden Photonen (der beiden Wege) und berechnet sich aus dem Verhältnis von maximaler zu minimaler Intensität, $Vis = \frac{2RT}{R^2+T^2}$. Die Breite des Koinzi-

²¹R. Lange, J. Brendel, E. Mohler, W. Martienssen, *Beam Splitting Experiments with Classical and with Quantum Particles*, Europhys.Lett. 5, 619 (1988)

²²s. Kap. 3, *Die Feynman Regeln für Interferenz*

²³H. Fearn, R. Loudon, *J.Opt.Soc.Am. B* 6, 917 (1989)

denzeinbruchs wird bestimmt durch die Kohärenzlänge der Photonen.

In den Einzelzählraten wird man keine Variationen feststellen können, die Rate bleibt konstant unabhängig von der Wegdifferenz. Der Interferenzeffekt ist ein Effekt 2.Ordnung.

Analoges kann durch Variation des Verhältnisses R:T erreicht werden. Auch in diesem Fall wird der Grad der Unterscheidbarkeit der beiden möglichen Wege (für Koinzidenzdetektion) variiert:

Mit unserem akusto-optischen Modulator haben wir einen solchen "Strahlteiler mit variabler Reflektivität". Für ein Verhältnis R:T=50:50 unseres AOM, den wir als "black box" betrachten, sollte eine minimale Koinzidenzzählrate, für Verhältnisse 100:0 und 0:100 sollte eine maximale Zählrate in den Koinzidenzen beobachtet werden können.

Folglich müßte - unter Voraussetzung der Ununterscheidbarkeit der beiden Photonen - die Koinzidenzzählrate mit doppelter Frequenz der Transmittivität / Reflektivität variieren.

Das ist genau das, was wir theoretisch schon abgeleitet haben!

5.3.2. (Un) - Unterscheidbarkeit der Photonen eines Paares

Für eine symmetrische Intensitätsverteilung in den Einzelzählraten, analog zu einem Strahlteiler mit R:T=50:50, sollte gelten: $P_{Coinc} = 0 \rightarrow$ maximaler Interferenzkontrast.

Die beiden Photonen müßten dazu völlig ununterscheidbar sein. Wir wollen im Folgenden genauer untersuchen, ob und inwieweit dies für unser Experiment Gültigkeit hat.

Auswirkungen der Frequenzverschiebung: $\omega' \rightarrow \omega \pm \Omega_{ac}$

Die induzierte Schallwelle ist eine laufende Welle, was aufgrund des Dopplereffektes unter Erhaltung der Gesamtenergie zu einer Frequenzverschiebung für das reflektierte Teilchen um einen Wert gleich der akustischen Frequenz, Ω_{ac} , führt

$$\omega_0 = \omega_G \pm \Omega_{ac}$$

Das Vorzeichen \pm impliziert Reflexionen von der entgegenkommenden bzw. weglauenden Welle impliziert.

Die Photonen besitzen je nach Einfallsrichtung auf den akusto-optischen Modulator an den zwei Ausgängen folgende Frequenzen (mit ω_i gleich der Frequenz des Idler Photons und ω_s gleich jener des Signal Photons).

$$\begin{aligned} |\theta_B\rangle : \quad \omega_i &\rightarrow \text{Transmission: } \omega_i \\ &\quad \text{Reflexion: } \omega_i - \Omega_{ac} \\ |-\theta_B\rangle : \quad \omega_s &\rightarrow \text{Transmission: } \omega_s \\ &\quad \text{Reflexion: } \omega_s + \Omega_{ac} \end{aligned}$$

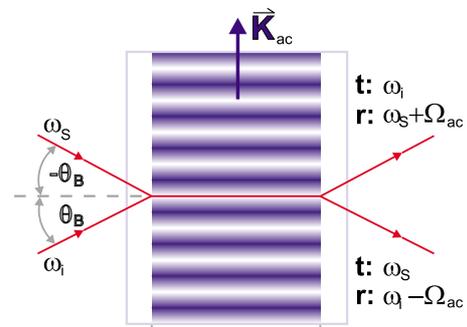


Abbildung 5.9.: Frequenzverschiebungen durch Reflexion an der Schallwelle

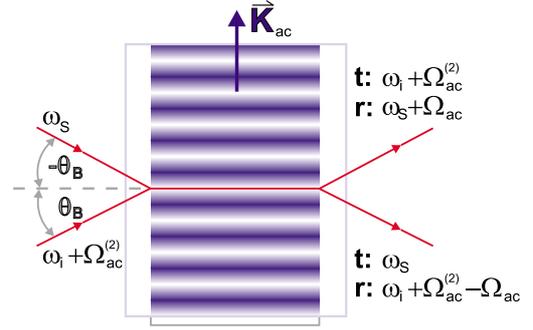
Der Weg des Photons kann aufgrund der verschiedenen Vorzeichen von Ω_{ac} leicht rückverfolgt werden.

Um doch noch Interferenzeffekte in den Koinzidenzzählraten beobachten zu können besteht auf den ersten Blick die einzige Möglichkeit darin, einen zweiten, zusätzlichen aku-

sto-optischen Modulator zu verwenden um so für die Frequenzverschiebung kompensieren zu können.

Die Frequenzen der Photonen sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} |\theta_B\rangle : \quad \omega_i + \Omega_{ac}^{(2)} &\rightarrow \begin{array}{l} \text{T: } \omega_i + \Omega_{ac}^{(2)} \\ \text{R: } \omega_i + \Omega_{ac}^{(2)} - \Omega_{ac} \end{array} \\ |-\theta_B\rangle : \quad \omega_s &\rightarrow \begin{array}{l} \text{T: } \omega_s \\ \text{R: } \omega_s + \Omega_{ac} \end{array} \end{aligned}$$



Wird im zweiten akusto-optische Modulator eine Schallwelle derselben Frequenz angeregt, mit $\Omega_{ac}^{(2)} = \Omega_{ac}$, so sind an jedem Detektor für sich die beiden möglichen Wege wieder ununterscheidbar. Es kann aufgrund der Frequenz des Photons nicht mehr auf seinen Weg (Transmission oder Reflexion) rückgeschlossen werden.

Abbildung 5.10.: Die Frequenzverschiebungen mit einem zusätzlichen AOM

Bevor man jedoch einen zweiten akusto-optische Modulator in das Experiment einbaut, überlegen wir uns noch, wie groß diese Frequenzverschiebung relativ zum Frequenzspektrum der Photonen eigentlich wirklich ist.

Wir beschreiben den Zustand des korrelierten Photonengpaars durch

$$|\psi\rangle = \int f(\omega') |\bar{\omega} + \omega'\rangle_s |\bar{\omega} - \omega'\rangle_i \quad (5.26)$$

$\bar{\omega} = \frac{\omega_{pump}}{2}$ sei die halbe Pumpfrequenz und ω' die Abweichung von dieser Frequenz - gemeinsam müssen sich die Frequenzen des Photonengpaars zur Pumpfrequenz aufaddieren. $f(\omega')$ ist vorerst eine allgemeine Funktion zur Beschreibung des Frequenzspektrums der korrelierten Photonen.

Für die Koinzidenzwahrscheinlichkeit

$$P_{Coinc} \propto \int d\omega_1 \int d\omega_2 \langle \psi | a_1^\dagger(\omega_1) a_2^\dagger(\omega_2) a_1(\omega_1) a_2(\omega_2) | \psi \rangle \quad (5.27)$$

erhält man nach Einsetzen der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a, a^\dagger , (definiert durch die Transmissions- und Reflexionseigenschaften des AOM) an jedem Detektor 1 und 2 und $\Delta\omega = \omega_1 - \bar{\omega} = \bar{\omega} - \omega_2$, $2\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$

$$P_{Coinc} \propto R^2 + T^2 - 2RT \int e^{-\frac{\Delta\omega^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{\Delta\omega \Omega_{ac}}{2\sigma^2}} e^{-\frac{\Omega_{ac}^2}{4\sigma^2}} \cos\left(\left(\Omega_{ac} - 2\Delta\omega\right)\frac{\delta l}{c}\right) d\Delta\omega \quad (5.28)$$

Das Frequenzspektrum der Photonen kann als Gaußverteilung über die Bandbreite $\sigma \propto 1/t_{coh}$ als $f(\Delta\omega) \propto e^{-\frac{\Delta\omega^2}{4\sigma^2}}$ beschrieben werden. R (T) ist die Reflektivität (Transmittivität) des akusto-optischen Modulators.

Wir wählen die Weglängendifferenz gleich Null, $\delta l = 0$, und überprüfen die Tiefe des Koinzidenzeinbruchs. Nur wenn der zweite und der dritte Term verschwinden, können wir für $R=T=0.5$ einen Kontrast von 100% beobachten: die Frequenzverschiebung aufgrund des akusto-optischen Modulators muß sehr viel kleiner sein als die Bandbreite der gebeugten Teilchen, $\Delta\Omega_{ac} \ll \sigma$.

Wir untersuchten diese Bedingung für unser Experiment. Die Bandbreite der Photonen ist durch die Interferenzfilter ($\Delta\lambda = 5 \text{ nm}$) und Irisblenden begrenzt, wir erhielten eine

Kohärenzlänge von $190 \mu\text{m}$ und damit eine Frequenzbreite $\sigma \approx \frac{l_{coh}}{c} = 1.58 \cdot 10^{12}$.

Dieser Wert ist um vieles größer als die Frequenz der induzierten akustischen Welle mit $\Omega_{ac} = 83 \text{ MHz} = 8 \cdot 10^7 \text{ Hz}$.

Für das Experiment mit unseren in parametrischer Fluoreszenz erzeugten Photonen konnten wir die beiden letzten Exponentialterme vernachlässigen und sollten einen maximalen Kontrast beobachten können, ohne daß es nötig ist einen zusätzlichen akusto-optischen Modulator einzubauen.

Wie würde die Situation z.B. bei Verwendung eines HeNe-Lasers mit einer sehr kleinen Frequenzbandbreite aussehen?

Gehen wir von einer Kohärenzlänge $l_{coh}=3\text{m}$ aus, erhalten wir mit $l_{coh} = \tau_{coh}c \approx \frac{c}{\Delta\nu}$ eine Bandbreite von $\Delta\nu = 1 \cdot 10^8$. Hier kann man nicht mehr davon sprechen, daß $\Delta\nu$ sehr viel größer ist als die akustische Frequenzverschiebung. Die Exponentialterme können nicht mehr vernachlässigt werden, es können keine Interferenzeffekte beobachtet werden.

Verzögerung in den Ankunftszeiten der beiden Photonen

Wir vernachlässigen von nun an die Frequenzverschiebung Ω_{ac} . Durch Umformen von Gleichung (5.27) (siehe App. D) für die Koinzidenzzählrate können wir den Einfluß einer Weglängendifferenz \neq Null genauer analysieren. Der relevante Term ist gegeben durch^{24,25}

$$P_{Coinc} \propto (R^2 + T^2) e^{-\frac{(\Delta\omega)^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \frac{2RT}{R^2 + T^2} e^{-\frac{\sigma^2 \delta l^2}{2c^2}} \cos\left(-2 \Delta\omega \frac{\delta l}{c}\right) \right]$$

Um für gleiche Frequenzen, $\omega_1 = \omega_2 \rightarrow \Delta\omega = 0$, einen Einbruch in der Koinzidenzzählrate mit maximalem Kontrast beobachten zu können, muß der Exponentialterm verschwinden und die Weglängendifferenz $\delta l = 0$ Null sein. Der Kontrast des Einbruchs ist dann nur noch abhängig vom Verhältnis R:T.

In Abbildung 5.11 ist der Kontrast in Abhängigkeit von der Weglängendifferenz δl für ein Intensitätsverhältnis R:T=50:50 aufgetragen.

Der Kontrast ist moduliert durch die Exponentialfunktion: $Vis = \frac{2RT}{R^2+T^2} \exp\left(-\frac{\sigma^2 \delta l^2}{2c^2}\right)$.

Die Bandbreite der Photonen mit einer Wellenlänge von 700 nm ist $\sigma = 1.578 \cdot 10^{12}$ (wie dies in unserem Experiment der Fall war).

Für $\delta l \neq 0$ nimmt der Kontrast exponentiell ab; er geht gegen Null für Weglängendifferenzen größer als die Kohärenzlänge der Photonen (von hier $190 \mu\text{m}$). Die Wellenpakete überlappen nicht mehr, die Teilchen sind unterscheidbar. Wir können keine Interferenzeffekte mehr beobachten.

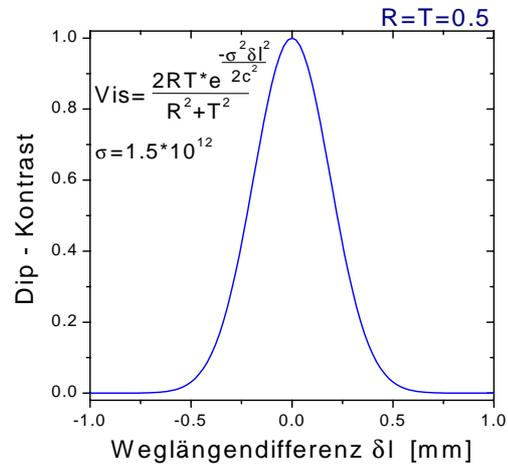


Abbildung 5.11.: Kontrast des Koinzidenzeinbruchs vs. Weglängendifferenz δl

²⁴Z.Y. Ou, L. Mandel, *Observation of Spatial Quantum Beating with Separated Photodetectors*, Phys.Rev.Lett. 61, 54 (1988)

²⁵R.A. Campos, B.E.A. Saleh, M.C. Teich, *Fourth-Order Interference of Joint Single-Photon Wave Packets in Lossless Optical Systems*, Phys.Rev.A 42, 4127 (1990)

Interferenzfilter

Die Interferenzfilter, wie auch eine Linse (für das Auffangen einer größtmöglichen Intensität), waren für das Experiment in das Detektorgehäuse integriert. Bei Justage für eine optimale

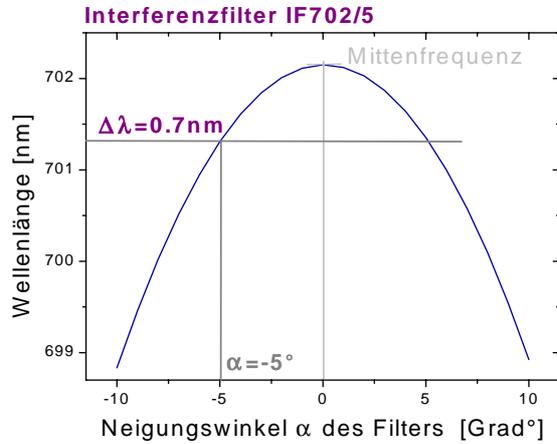


Abbildung 5.12.: Mittenfrequenz als Funktion der Filterverkipfung

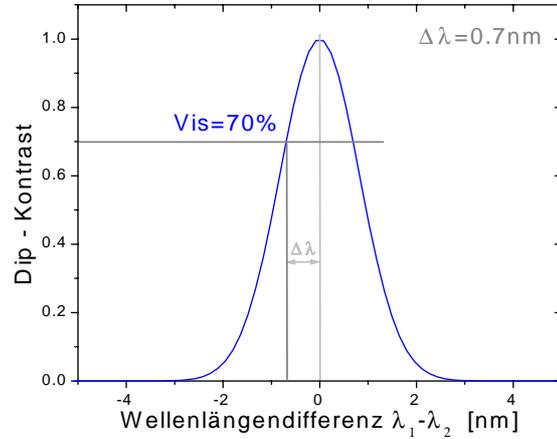


Abbildung 5.13.: Dipkontrast in Abhängigkeit der Differenz $\lambda_1 - \lambda_2$

Zählrate kann es deswegen durchaus vorkommen, daß der Filter nicht exakt senkrecht ist relativ zur Ausbreitungsrichtung der Photonen, was zu einer Veränderung der Transmissions-eigenschaften des Filters führt.

Die Interferenzfilter sind kleine Fabry-Perot Interferometer und sehr sensitiv auf Verkip-pung. Die Abhängigkeit der zentralen Wellenlänge vom Verkip-pungswinkel für ein 702 ± 2.5 nm Filter wurde an unserem Institut im Rahmen einer Diplomarbeit²⁶ ausgemessen, siehe Abb. 5.12.

Auf den ersten Blick scheinen Wellenlängenunterschiede von weniger als 1 nm nicht unbe-dingt viel zu sein. Wir analysierten die Abhängigkeit des Kontrastes des Koinzidenzeinbruchs von der Differenz $\lambda_1 - \lambda_2$ etwas genauer und mußten feststellen, daß dieser exponentiell mit dem Quadrat der Differenz absinkt.

$$P_{Coinc} \propto (R^2 + T^2) e^{-\frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{4\sigma^2}} \left[1 - \frac{2RT}{R^2 + T^2} e^{-\frac{\sigma^2 \delta l^2}{2c^2}} \cos\left(-2\Delta\omega \frac{\delta l}{c}\right) \right]$$

Mit einer Weglängendifferenz $\delta l = 0$ erhalten wir

$$P_{Coinc} \propto (R^2 + T^2) e^{-\frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{4\sigma^2}} \left[1 - \frac{2RT}{R^2 + T^2} \right] \quad \text{für } \delta l = 0$$

Für das Experiment hat dies weitreichende Folgen. In Abbildung 5.13 kann man die Abhängig-keit des Kontrastes von den Differenzwellenlängen $\lambda_1 - \lambda_2$ erkennen.

Er fällt exponentiell ab mit der Differenz der zwei verschiedenen Frequenzen eines Photo-nenpaares an den zwei Detektoren.

Für den vorigen Fall einer Verkip-pung des Interferenzfilters um 5° mit einer resultierenden Wellenlängendifferenz von 1 nm bedeutet dies eine Reduzierung des Kontrastes um 30%!

Jedwede Dejustage, die zu einem $\Delta\lambda \neq 0$ für die beiden Photonen eines Paares führt, hat den weitaus einschneidenden Einfluß auf die Interferenz aller bisher besprochenen Ursachen für einen Kontrastverlust in der Koinzidenzzählrate.

²⁶M. Michler, *Photonenkorrelationen an Mehrfachstrahlteilern*, Diplomarbeit, Universität Innsbruck (1994)

5.4. Aufbau des Experimentes

Zur Realisierung des Experimentaufbaus siehe Abb. 5.14. Durch Pumpen eines nichtlinearen Kristalles, LiIO_3 (2cm x 2cm x 2.5cm), mit einem Argonionen (Ar^+) Laser (singlemode betrieben, Wellenlänge: 351,1 nm, Divergenz: 0.5 mrad, durchschnittliche Leistung: etwa 400 mW) wurden Paare korrelierter Photonen erzeugt.

Zur Selektion der Photonen benutzten wir Interferenzfilter mit einer Mittenfrequenz von 702 nm und einer Halbwertsbreite von 5 nm. Sie befinden sich innerhalb des Detektorgehäuses. Wir selektierten die Photonen des entarteten Falles, d.h. jene mit gleicher Wellenlänge (702 nm) und gleichen Austrittswinkeln (28.15°).

Wir justierten Irisblenden in die Wege der Photonen, jeweils zwei knapp hinter den Kristall und zwei in einer größeren Distanz. Wenn man die Position der Blenden durch Maximieren der Zählraten optimiert, können sie dazu verwendet werden einen HeNe-Laser in eine optimale Position - mit gleicher Ausbreitungsrichtung wie die Photonen - zu bringen.

Mittels dieses (sichtbaren!) Laserstrahls können dann die optischen Komponenten und der akusto-optische Modulator leichter (vor)justiert werden.

Wir konstruierten zwei 'optische Posaunen' mit jeweils einem Spiegel und einem Prisma

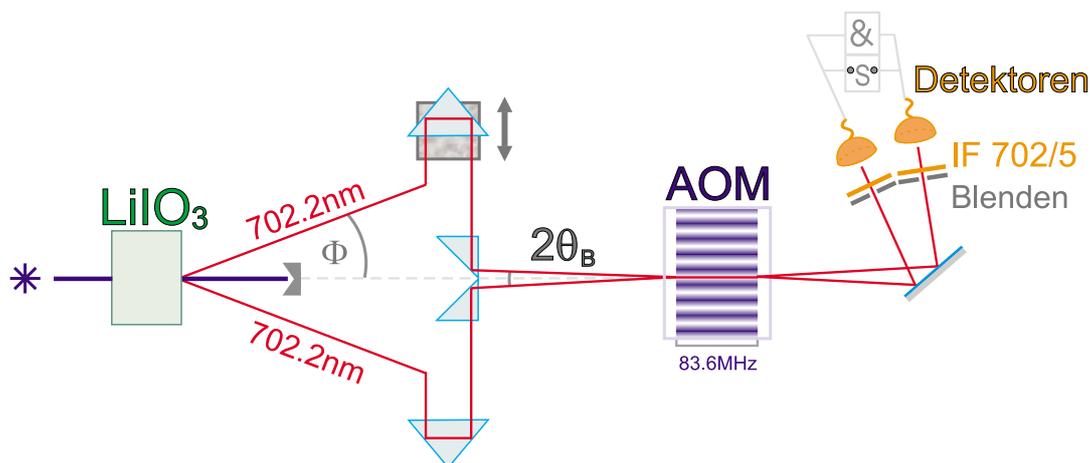


Abbildung 5.14.: Der experimentelle Aufbau im Labor

als Retroreflektor zur Realisierung einer variablen Länge der Arme: eine Verschiebung des Prismas mittels eines Schlittens um eine Strecke $\delta l/2$ entspricht einer Weglängenänderung von δl . Die Weglängendifferenz kann abgeglichen werden ohne die Strahlrichtung und damit die Einfallswinkel auf den akusto-optischen Modulator zu ändern.

Der Einfallswinkel der Photonen sollte idealerweise gleich dem Braggwinkel $\theta_B^{out} = 7.7336$ mrad sein, definiert durch die Schall- und die Wellenlänge der Photonen, $\sin(\theta_B^{out}) = \frac{\lambda}{2\Lambda_{ac}}$.

Der Winkel ist sehr sehr klein, es können zur Ablenkung der beiden Photonen auf den akusto-optischen Modulator keine Spiegel verwendet werden (aufgrund der Randbreite der Halterungen von minimal jeweils 0.5 cm).

Wir benutzten kleine Prismen (fixiert - wie auch die beiden Retroreflektor-Prismen - auf den in zwei Richtungen verkippbaren Prismenstischen); die Photonen werden durch Totalreflexion in die richtige Richtung gelenkt.

Die Meßergebnisse - insbesondere für den Zwei-Photonen Zustand - sind sehr sensitiv auf jede Dejustage. Der akusto-optische Modulator befindet sich daher auf einem Tisch, der in drei Richtungen verschiebbar (x,y,z) und in ebensoviele Richtungen verkippbare ist.

Die Detektionseinheiten sind auf verkippbaren Schlitten montiert. Im Detektorgehäuse können Interferenzfilter untergebracht werden sowie eine kleine Linse, in deren Fokus sich die Diode befindet. Die Linse dient zur Maximierung der Zählraten.

Um das ganze System wirklich gut justieren zu können, was sich aufgrund der kleinen Winkel und der großen Sensitivität der Messungen als problematisch herausstellte, wird der AOM vorerst aus dem Strahl gefahren. Mittels des HeNe-Lasers können dann die Winkel durch Abmessen der relevanten Längen und symmetrisch zum Pumpstrahl justiert werden.

Wir stellen den AOM zurück in den Schnittpunkt der HeNe-Laserstrahlen und es wäre optimal, mittels des Lasers den AOM in Betrieb zu justieren. Allerdings ist das nicht möglich. Wie wir schon in Kap.5.3.2 festgestellt haben, kann für einen Laser keine Schwebung beobachtet werden.

Wir müssen uns auf die Beobachtung der Zählraten der Photonenpaare verlassen und finden mit Änderung der Schallintensität tatsächlich einen kleinen Einbruch in den Koinzidenzen. Den Kontrast des Koinzidenzeinbruchs optimierten wir einerseits durch Variieren der akustischen Frequenz (\equiv Variation des Braggwinkels), was einen sehr viel feineren Abgleich erlaubt als dies durch die mechanische Justierung der Prismen möglich wäre. Andererseits werden unter Beobachtung des Kontrastes die Weglängen auf Null abgeglichen.

Im Gegensatz zum Heisenbergexperiment bleiben für die Messung die Filter und Blenden stehen. Sie sind, neben dem akusto-optischen Modulator selbst (Borrmandreieck), das einzige Hilfsmittel zur Limitierung der Bandbreiten der Photonen.

Die Irisblenden waren auf einen Durchmesser von $d=1.5$ mm geöffnet, die Distanz vom Kristall zu den Blenden betrug $D=250$ cm.

5.4.1. Die verwendeten Komponenten

Der akusto-optische Modulator (AOM)

A. Allgemeines

Der akusto-optische Modulator stammt von der Firma Isomet mit der Modellnummer 1205-603F.

Mittels zweier jeweils 7 mm langer Piezokristalle wird auf einen Bleimolybdat Kristall (PbMO_4) mit den Abmessungen $b \times h \times l = 7 \times 2.8 \times 18$ mm das sinusförmige Signal eines Frequenzgenerators übertragen und so eine Schallwelle eingekoppelt.

Auf der den Piezokristallen gegenüberliegenden Seite befindet sich ein kleiner Metallblock. Er garantiert eine laufende Welle ohne störende Rückreflexionen des Schalls (siehe Abb.5.15). Der Kristall und die zugehörige Elektronik für die Piezokristalle befinden sich in einem schützenden Gehäuse mit zwei kleinen Löchern vom Durchmesser von 4 mm. Durch sie hindurch kann das Licht auf den AOM ein- und ausfallen. Für unsere Zwecke war die Abdeckung jedoch unpraktisch und wir entfernten sie.

Die Fenster des Kristalles sind im sichtbaren Bereich breitband-antireflexionsbeschichtet, die Verluste sind limitiert auf $\leq 3\%$ (beruhend auf einer Lichtwellenlänge von 633 nm).

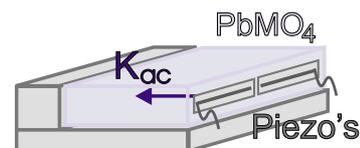


Abbildung 5.15.: Der akusto-optische Modulator

Die garantierten Spezifikationen des Herstellers sind in Tabelle 5.1 ersichtlich

Leistungsverhalten des AOM	
Mittelfrequenz	80 MHz
Frequenzbandbreite	30 MHz
Effizienz	85% @ 633 nm
aktive Apertur	1 mm
induzierte Leistung	$\leq 0.6 \text{ W @ } 633 \text{ nm}$ ca. $\leq 0.7 \text{ W @ } 700 \text{ nm}$

Tabelle 5.1.: Die Spezifikationen des Herstellers für den AOM 1205-603F

Der Hersteller garantiert eine Mindesteffizienz in die Bragg-beugte Richtung von 85% bei einer Lichtwellenlänge von 633 nm. Er gibt allerdings Testergebnisse bekannt, nach denen typischerweise Werte $\geq 90\%$ erreicht wurden.

Die Effizienz ist eine Funktion der Frequenz des induzierten Signals und findet ihr Maximum knapp über der angegebenen Mittelfrequenz bei 90 MHz.

Nach den Empfehlungen des Herstellers sollten Leistungen über 1 W nicht in den Kristall eingekoppelt werden, bei Leistungen über 0.7 W beginnt bereits der Bereich mit zunehmenden Verzerrungen und Zerstörungen des Indextgitters.

Die Eigenschaften des Materials selbst, in das die Schallwelle induziert werden soll, sind im folgenden spezifiziert

Materialeigenschaften	
Material	Bleimolybdat PbMO_4
Brechungsindex	2.3
Dichte ρ	$6.95 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Photoelastische Konstante \wp	0.28
Parameter $M = \frac{\wp^2 n^6}{\rho v_{ac}^3}$	$34.912 \cdot 10^{-15}$
Schallgeschwindigkeit v_{ac}	$3.63 \cdot 10^3 \text{ m/s}$
Braggwinkel	$7.0 \text{ mrad @ } 633 \text{ nm}$

Tabelle 5.2.: Die Materialeigenschaften von Bleimolybdat

Die Angaben für die Dichte des Materials, Brechungsindex und die photoelastische Konstante stammen aus Quantum Electronics²⁷. Verschiedene Materialeigenschaften anderer Medien, die für akusto-optische Effekte herangezogen werden, wurden von R.W. Dixon zusammengefaßt²⁸.

Mit Gl.(5.4) und den Parametern aus Tabelle 5.2 erhält man die Brechungsindexänderung des AOM zu $\Delta n_0 = 2.299 \cdot 10^{-5} \sqrt{P_{ac}}$. Für eine induzierte Leistung von z.B. 0.95 W (dies entspricht - wie wir sehen werden - einer maximalen Reflektivität des AOM) liefert uns das ein $\Delta n_0 = 2.24 \cdot 10^{-5}$.

²⁷A. Yariv, *Quantum Electronics*, J.Wiley & Sons Inc., NY (1989)

²⁸R.W. Dixon, *Photoelastic Properties of Selected Materials and their Relevance for Applications to Acoustic Light Modulators and Scanners*, J.Appl.Phys. 38, 5149 (1967)

B. Generierung eines sinusförmigen Signals

Wir erzeugten die Schallwellen durch Anlegen des sinusförmigen Signals eines Frequenzgenerators an die Piezos. Die Frequenz des Signals war - nach Feinjustierung für optimale Einfallswinkel der beiden Photonen - 83.6MHz, die resultierende Schallwellenlänge $\Lambda_{ac} = 45.4 \mu m$.

Am Frequenzgenerator können mehrere konstante Abschwächungen des Signals eingestellt werden. In Abstimmung dieser Abschwächung mit einem separaten Verstärker, der mittels Versorgungsstrom geregelt werden kann, wurde die Amplitude des Signals und so die akustische Intensität kontinuierlich variiert.

Die Abhängigkeit der Leistung aus dem Verstärker vom eingeprägten Strom ist in Abbildung 5.16 dargestellt.

Bis etwa 1.3 W ist der Zusammenhang zwischen den beiden Größen linear, danach geht die Verstärkung in die Sättigung. Da wir größere Leistungen nicht verwenden konnten, ist dieser Bereich ohnehin uninteressant.

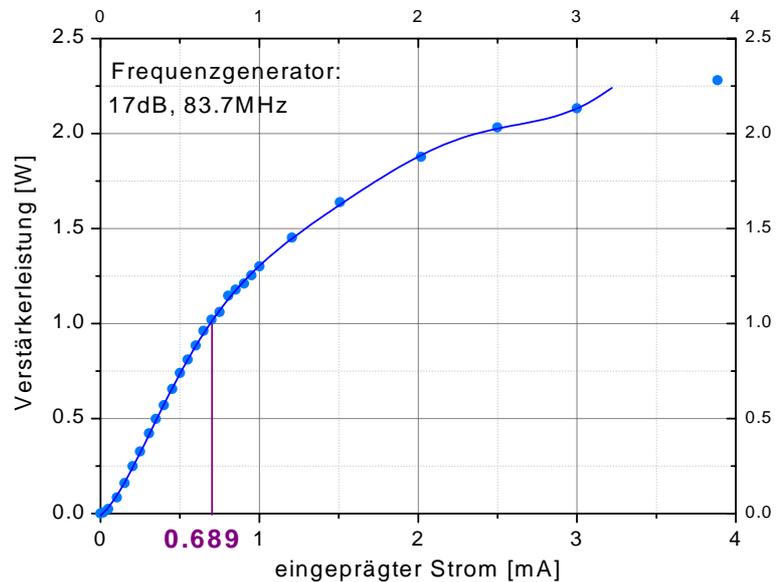


Abbildung 5.16.: Die Leistung aus dem Verstärker in Abhängigkeit des eingeprägten Stromes

Konversionskristall

Wie auch für das Heisenbergmikroskop verwendeten wir zur Erzeugung der korrelierten Photonen als nichtlineares Medium einen LiIO_3 -Kristall.

Wir haben hier keine Probleme mit unscharfen Abbildungen; es kann ein Kristall mit einer größeren Dicke ($d=2.5 \text{ cm}$) verwendet werden, was höhere Zählraten garantiert.

Der Kristall befindet sich in einem dichten Gehäuse, dessen Fenster antireflexbeschichtet sind.

Für genauere Daten zum Kristall siehe Appendix A.

Prismen

Die zur Reflexion der Photonen verwendeten rechtwinkligen Prismen (Fa. Melles Griot) aus BK7 Glas sind breitband-antireflexbeschichtet mit einer Reflektivität $\leq 2\%$ im Wellenlängenbereich von 500-890 nm. Sie besitzen eine Oberflächenebenheit von $\lambda/2$ (bei einer Wellenlänge von 546.1 nm), einen rechten Winkel von $90^\circ \pm 3''$ und eine Kantenlänge von $12.7 \pm 0.15 \text{ mm}$ bzw. $25 \pm 0.15 \text{ mm}$.

Die Prismen funktionieren über interne Totalreflexion. Der kritische Winkel, unter dem dieser Effekt beim Übergang von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium auftritt, ist $\sin(\theta_k) = n(\lambda)^{-1}$. Beispielsweise ist bei einer Wellenlänge von 700 nm der Bre-

chungsindex des BK7 Glases gleich $n(700\text{ nm}) = 1.513$ und damit $\theta_k = 41.37^\circ$. Licht, das in einem Winkel gleich oder größer diesem Winkel auf das Prisma auftrifft, wird im Idealfall mit einer Effizienz von 100% totalreflektiert.

Wir justierten die Retroreflektoren mit einem Einfallswinkel der Photonen von 45° relativ zur Rückwand des Prismas; für die kleinen Prismen betrug der Winkel etwa $45^\circ + \approx \theta_B/2$.

Detektoren

Wir detektierten die Photonen mittels Silizium-Lawinen-Photodioden²⁹.

Zur Minimierung der Dunkelzählraten sind neben Peltierelementen und einer Wasserkühlung auch kleine Kühlkörper zur Luftkühlung angebracht. Die Dunkelzählraten bewegten sich in einer Größenordnung von 1000 bzw. 1200 pro Sekunde.

Die Funktionsweise der Dioden selbst ist völlig analog zu jenen, die für das Heisenbergmikroskop herangezogen wurden (Kap. 75).

Die Dioden besitzen eine annähernd kreisförmige empfindliche Fläche mit einem Durchmesser $\phi = 500\ \mu\text{m}$. Um die Zählrate zu maximieren, befindet sich die Diode im Fokus einer kleinen Linse (Brennweite 3.3 cm), die im Detektorgehäuse integriert ist: Photonen mit gleichem Impuls, die von der Linse mit einem Durchmesser von 2.5 cm noch eingefangen werden, werden detektiert.

5.5. Die experimentellen Daten

5.5.1. Daten, gemessen mit einem HeNe-Laser

Die folgenden Daten wurden mittels eines HeNe-Lasers (mit den Spezifikationen: TEM₀₀, $\lambda_{\text{HeNe}} = 632.8\text{ nm}$, Divergenz $\text{div} = 1\text{ mrad}$) aufgenommen.

Zur Messung der Reflektivität in Abhängigkeit des Einfallswinkels wurde der akusto-optische Modulator auf einem Drehtischchen mit einer geeichten Skalierung (in ° Grad) montiert. Die Drehung des AOM ist äquivalent zur Drehung des einfallenden Laserstrahls.

Für die zweite Messung, bei der wir die Reflektivität in Abhängigkeit der Leistung aufzeichneten, wurde der optimale Einfallswinkel direkt übernommen.

Messung der tatsächlichen Wechselwirkungslänge l

Wir können die tatsächliche Wechselwirkungslänge l aus einer Messung der Reflektivität des Lichtes in Abhängigkeit vom Einfallswinkel extrahieren. Der entsprechende Zusammenhang ergibt sich aus der Sinc-Funktion in Gl. (5.16)

$$R \propto \text{sinc}^2 \left[(\theta - \theta_B) \frac{2\pi l \theta_B n}{\lambda} \right]$$

Aufgrund der kleinen Winkel verwendeten wir die Näherung $\sin(\theta) / \tan(\theta) \equiv \theta$.

Für die Messung wurde die optimale Treiberleistung durch Suchen der maximale Reflektivität definiert.

Wir können die Winkelverteilung des Laserlichts mittels einer Gaußfunktion beschreiben

²⁹G. Denifl, Einzelphotonen-Detektoren für Quantenkorrelations-Experimente, Diplomarbeit, Universität Innsbruck (1993)

$$e^{-2 \frac{(\theta - \theta_B)^2}{\text{Divergenz}^2}}$$

und erhalten aus der Faltung mit dem Quadrat der Sinc-Funktion einen theoretischen Wert für die maximale Reflektivität von $R=97.1\%$.

Der gemessene Wert der Reflektivität, den wir aus der Kurve zur Anpassung an die Daten ablesen können, lag bei $R=90.7 \pm 3.5\%$. Die Diskrepanz zum theoretischen Wert von 6.4% können auf Justierung und hauptsächlich auf Imperfekteiten des Kristalles zurückgeführt werden.

Aus der Winkelbreite $\Delta\theta$ des Maximums der Sinc-Funktion bis zu ihrem ersten Minimum können wir experimentell die Wechselwirkungslänge l bestimmen.

Wir besitzen alle nötigen Informationen, setzen in die Gleichung für die Reflektivität ein und erhalten für die tatsächliche Wechselwirkungslänge:

$$l = 14.413 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Der Wert entspricht bis auf 0.4 mm der Breite der beiden Piezokristalle.

Messung der Fläche: Umrechnung von Intensität auf Leistung

Wir können zwar die Treiberleistung messen, nicht jedoch die akustische Intensität. Könnten wir allerdings die Fläche des Indexgitters bestimmen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Schallwelle, ist das nicht mehr nötig.

Ein Parameter dieser Fläche ist uns schon bekannt, die Wechselwirkungslänge l . Zur Bestimmung des zweiten Parameters, der Höhe h , messen wir die Reflektivität des HeNe-Lasers in Abhängigkeit von der Treiberleistung P .

Den Zusammenhang zwischen den beiden Größen haben wir schon in Gl.(5.14) hergeleitet, wir ersetzen jetzt in unserer Theorie die akustische Intensität durch die Leistung pro Fläche.

Die gemessene Kurve ist in Abb. 5.18 abgebildet. Wir beobachten eine sinusförmige Oszillation des reflektierten Lichtes in Abhängigkeit von der induzierten Leistung, P_{ac} , in der Form

$$R = \text{Amp} \cdot \sin^2(F1 \sqrt{P_{ac}})$$

mit den Parametern Amp(litude) und Frequenz $F1$.

Durch einen Vergleich von $F1$ mit der theoretischen Kurve erhalten wir für die gesuchte Fläche A

$$\sqrt{A} = \frac{\pi l}{\sqrt{2} \lambda} \sqrt{M} F1^{-1} = 4.8765 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

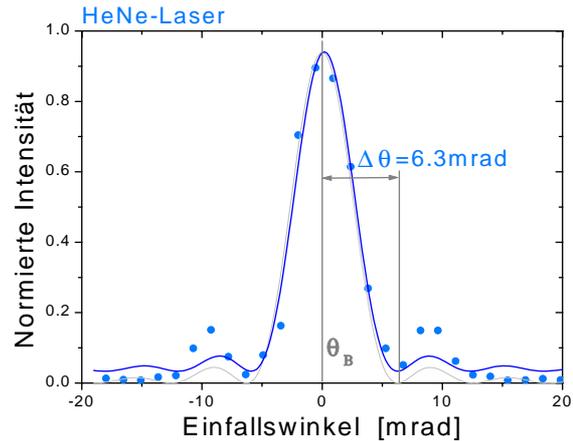


Abbildung 5.17.: Reflektivität als Funktion des Einfallswinkels

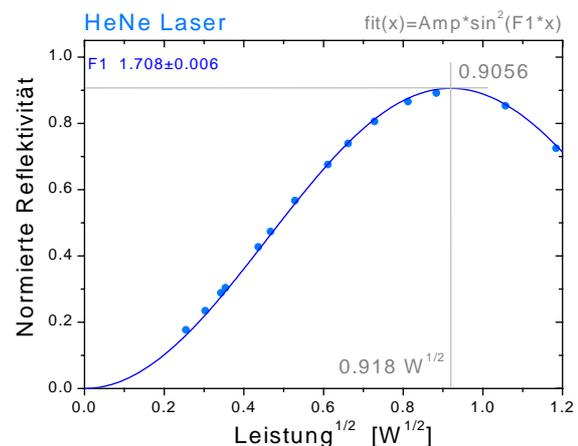


Abbildung 5.18.: Normierte Reflektivität in Abhängigkeit der Leistung

Mit $l=14.413$ mm ergibt sich die Höhe der akustischen Welle innerhalb des Kristalles zu $h = 2.12$ mm.

Die gemessene Reflektivität beträgt 90.56%, die fehlenden 6.54% auf den theoretisch möglichen Wert von 97.1%, den wir unter Berücksichtigung der Divergenz des Lasers berechneten, beruht einerseits auf kleinen Imperfektheiten in der Justierung. Hauptsächlich allerdings hängt die Abnahme der Intensität im reflektierten Strahl mit der Verzerrung des Indexgitters mit zunehmender akustischer Leistung zusammen. Sie beginnen nach Angaben des Herstellers bei induzierten Leistungen von etwa 0.5 W (das erste Beugungsmaximum unserer Kurve liegt bereits bei $\sqrt{0.918} = 0.8427$ W), Leistungen über 1 W sollten vermieden werden.

5.5.2. Die gemessenen Daten für unsere korrelierten Photonen

Zur Optimierung der Justierung unseres Experimentaufbaus und insbesondere des AOM beobachteten wir die Koinzidenzzählrate und optimierten ihr Minimum.

Der Kontrast dieses Koinzidenzeinbruchs ist sehr sensitiv auf den Überlapp der beiden Photonen am akusto-optischen Modulator und abhängig von einer optimalen Erfüllung der Braggbedingung für das Photonenpaar. Wir optimierten die Einfallswinkel durch Variieren der akustischen Frequenz.

Die Frequenz des Signals betrug 83.6 MHz, was einer Schallwellenlänge (innerhalb des Kristalles) von $45.4 \mu\text{m}$ und einem Braggwinkel von 7.7336 mrad (außerhalb des Kristalles) entspricht.

Zur Messung der Einzelzählraten blockierten wir einen der beiden Arme des Interferometers; die Photonen können nur in einer Einfallrichtung auf den akusto-optischen Modulator auftreffen.

Vor den Detektoren in den beiden Ausgängen befinden sich Irisblenden (1.5 mm Durchmesser), die Photonen mit einer Bandbreite von 0.8 nm entsprechend einer Winkelbreite von 0.6 mrad selektieren. Relativ zur Winkelbreite des Borrmann Fächers von $2\theta_B^{in} = 6.725$ mrad ist dies vernachlässigbar, $\frac{0.6 \text{ mrad}}{6.725 \text{ mrad}} = 8.9 \cdot 10^{-2}$.

Unter Einsetzen in unser Faltungsintegral zur Bestimmung des Intensitätsabfalls in braggbeugter Richtung erhalten wir einen theoretischen Wert, $R_{theor}=98.8\%$.

Die Detektoren selbst haben nicht unbedingt dieselbe Effizienz. Um eine aussagekräftige Meßkurve zu bekommen, müssen wir für solche Unsymmetrien korrigieren.

Wir betrachten die Einzelzählraten für die beiden Teilarme 1 und 2, mit Effizienzen der beiden Detektoren gleich η_a und η_b

$$T_1 = \frac{NT_1}{NT_1 + NR_1} = \frac{\eta_a}{\eta_a} \frac{NT_1}{NT_1 + NR_1} = \frac{C_1(0.Ordung)}{C_1(0.Ordung) + \frac{\eta_a}{\eta_b} C_1(1.Ordung)}$$

$\eta_a NT_1 = C_1(0.Ordung)$ ist die Zählrate des ersten Armes in 0. Ordnung (Transmission) und $\eta_b NT_1 = C_1(1.Ordung)$ ist die Zählrate des ersten Armes in 1. Ordnung (Reflexion). Die Effizienzen erhält man durch Summieren von Transmission und Reflexion ($T_1 + R_1 = 1$) und Vergleichen für verschiedene Schalleistungen.

Die Dunkelzählraten für die beiden Detektoren betrug 1200 bzw. 1000 Counts pro Sekunde.

Wir nahmen Reflektivität und Transmittivität in Abhängigkeit der akustischen Leistung auf, siehe unteres Bild in Abb. 5.19. Die durchgezogenen grauen Linien sind theoretische Kurven, die Punkte die aufgenommenen normierten Daten (abzüglich der Dunkelzählraten

und normiert auf die Gesamtintensität).

Die Periodizität der Oszillationen beträgt 1.533 ± 0.027 bzw. 1.566 ± 0.053 für den zweiten Teilarm. Die Werte stimmen gut - innerhalb des Fehlers der Anpassungskurve - mit der theoretischen Periodizität (Gl. (5.21)) von 1.5412 überein.

Wir erreichten in unseren Messungen eine maximale Reflektivität von $R=88.563 \pm 2.093\%$. Die Diskrepanz zum theoretisch berechneten Wert ($R_{theor}=98.8\%$) von 10.24% ist vor allem auf das imperfekte Gitter zurückzuführen:

Bis zu einer akustischen Leistung von 0.52 W folgt die Kurve noch sehr gut der Theorie. Das erste Maximum in der Zählrate der braggbeugten Photonen liegt weit über diesem Wert und im Bereich der Verzerrung des Indesgitters (siehe unteres Bild in Abb. 5.19).

Zur Messung des Zwei-Photonen Zustands benutzen wir beide Arme des Aufbaus: die Photonen eines Paares fallen jedes auf einen Eingang des akusto-optischen Modulators ein.

Für 14 verschiedene Werte der akustischen Leistung variierten wir die Weglänge δl . Die aufgezeichneten Daten zeigen jeweils einen Dip in der Zählrate, dessen Breite im Durchschnitt $220 \mu\text{m}$ (FWHM) beträgt.

Die Einzelzählraten zeigen keine Oszillationen, trotzdem korrigierten wir für kleine Variationen, die auf diese Schwankungen zurückzuführen wären: wir multiplizierten die Koinzidenzen jedes Datensatzes mit dem Produkt der durchschnittlichen Einzelzählraten der beiden Detektoren und dividierten durch den zu jeder Schlittenposition gehörenden individuellen Wert.

Der maximale Kontrast, den wir bei einer Schalleistung von 0.254 W erreichten, lag bei $Vis=69.7\%$.

Die Reduzierung des Dipkontrastes kann nur zu einem kleinen Teil auf imperfektes Alignment und auf die Imperfekteiten des Indexgitters zurückgeführt werden: im Gegensatz zu den Einzelzählraten sollte letzteres hier aufgrund der Position des Minimums noch keine allzu große Rolle spielen.

Die Gründe liegen vielmehr in leicht verschiedenen Zentralfrequenzen der beiden Photonen eines Paares bei den zwei Detektoren. Der Fehler wird verursacht durch leichte Verkippungen der Interferenzfilter. In Kap. 5.3.2 fanden wir bei Diskussion des Einflusses der Position der Filter, daß schon für eine kleine Verkippung einer der beiden Filter um 5° (womit man aufgrund der Integrierung der Filter in das Detektorgehäuse durchaus rechnen kann) und einer resultierenden Verschiebung der mittleren Wellenlänge eines der beiden Photonen um 1 nm, sich der Kontrast um 30% reduziert.

Der Datensatz mit maximalen Kontrast ist in Abb. 5.20 ersichtlich, zusätzlich sind auch die Einzelzählraten aufgetragen.

Die normierte Koinzidenzzählrate für $\delta l = 0$ als Funktion der akustischen Leistung hängt mit den gemessenen 14 Dipkontrasten über die Definition des Kontrastes selbst ($Vis=(\text{Baseline-Dipminimum})/\text{Baseline}$) zusammen

$$Koinz(\sqrt{P}) = (1 - Vis(\sqrt{P})) \cdot (R_1(\sqrt{P}) R_2(\sqrt{P}) + T_1(\sqrt{P}) T_2(\sqrt{P}))$$

Die Zählrate ist im oberen Bild von Abb. 5.19 aufgetragen. Die Daten wurden mittels des Cosinusquadrat ($\cos^2(x) \equiv 0.5\{1 - \cos(2x)\}$), multipliziert mit einer Exponentialfunktion zur Angleichung des Abfalls im Kontrast an die Daten, angepaßt, $f = 0.5(1 - e^{-\frac{C}{\sqrt{P}}} \cdot \cos(2B\sqrt{P}))$. Für eine akustische Leistung von $\sqrt{P} = 0.5$ im Bereich geringer Verzerrungen des Gitters erhalten wir eine Amplitude der Kurve von $92.5 \pm 2.9\%$.

Die Periodizität der an die Daten angepaßten Kurve beträgt $3.036 \pm 0.065 \text{ W}^{-\frac{1}{2}}$. Vergleicht

man diesen Wert mit der Periodizität der Reflektivität (Einzelzählraten), so stellt man eine Verdoppelung der Periode fest!

Die experimentellen Ergebnisse bestätigen die Theorie: die Pendellösungslänge des Zwei-Photonen Zustandes ist nur halb so lang verglichen mit jener der Einzelphotonen.

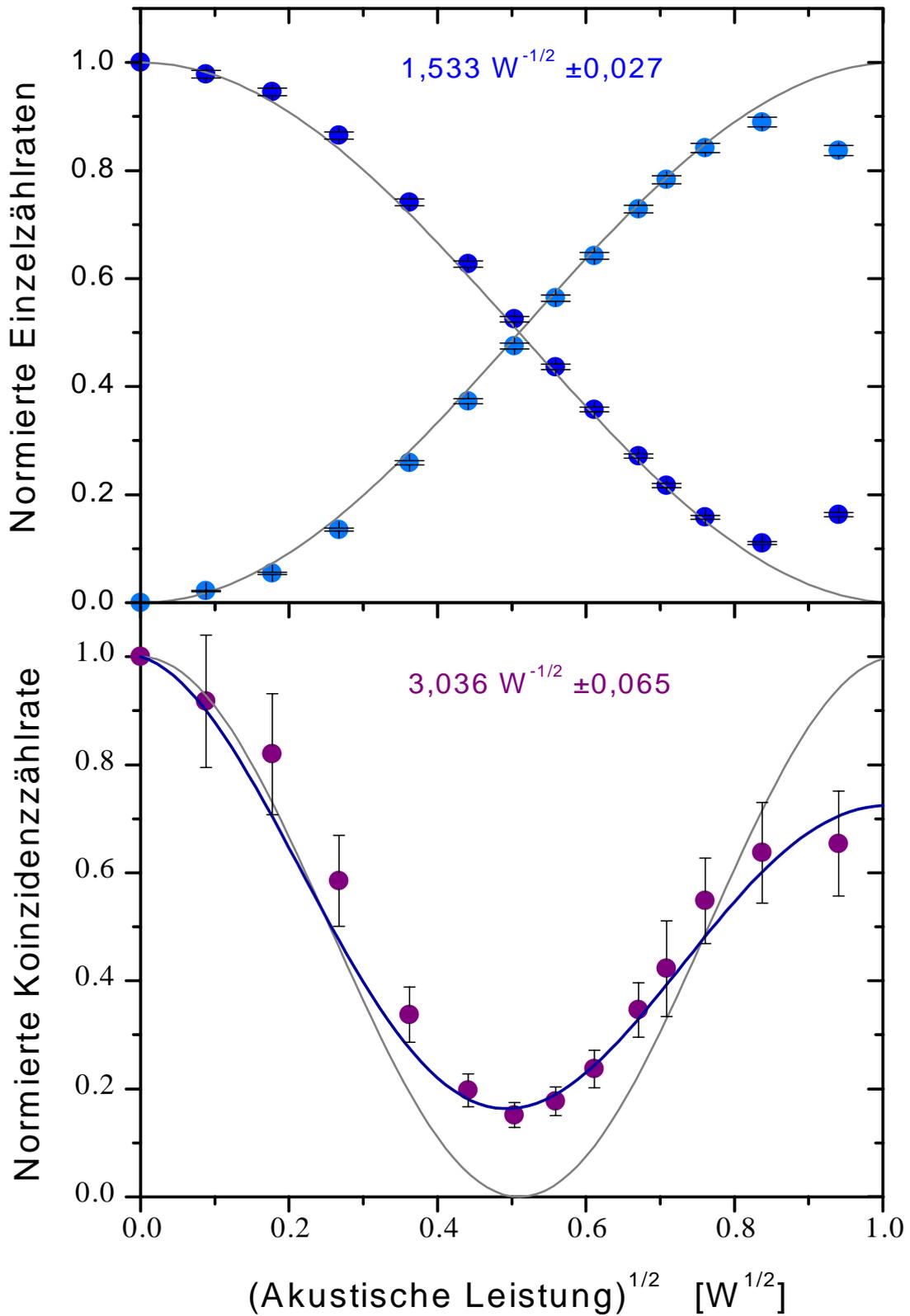


Abbildung 5.19.: Normierte Einzel- und Koinzidenzzählraten der korrelierten Photonen als Funktion der Leistung; die Koinzidenzen oszillieren mit der doppelten Frequenz der Einzelzählraten; die Pendellösungslänge des 2-Photonen Zustands ist nur halb so lang wie jene der Einzelphotonen!

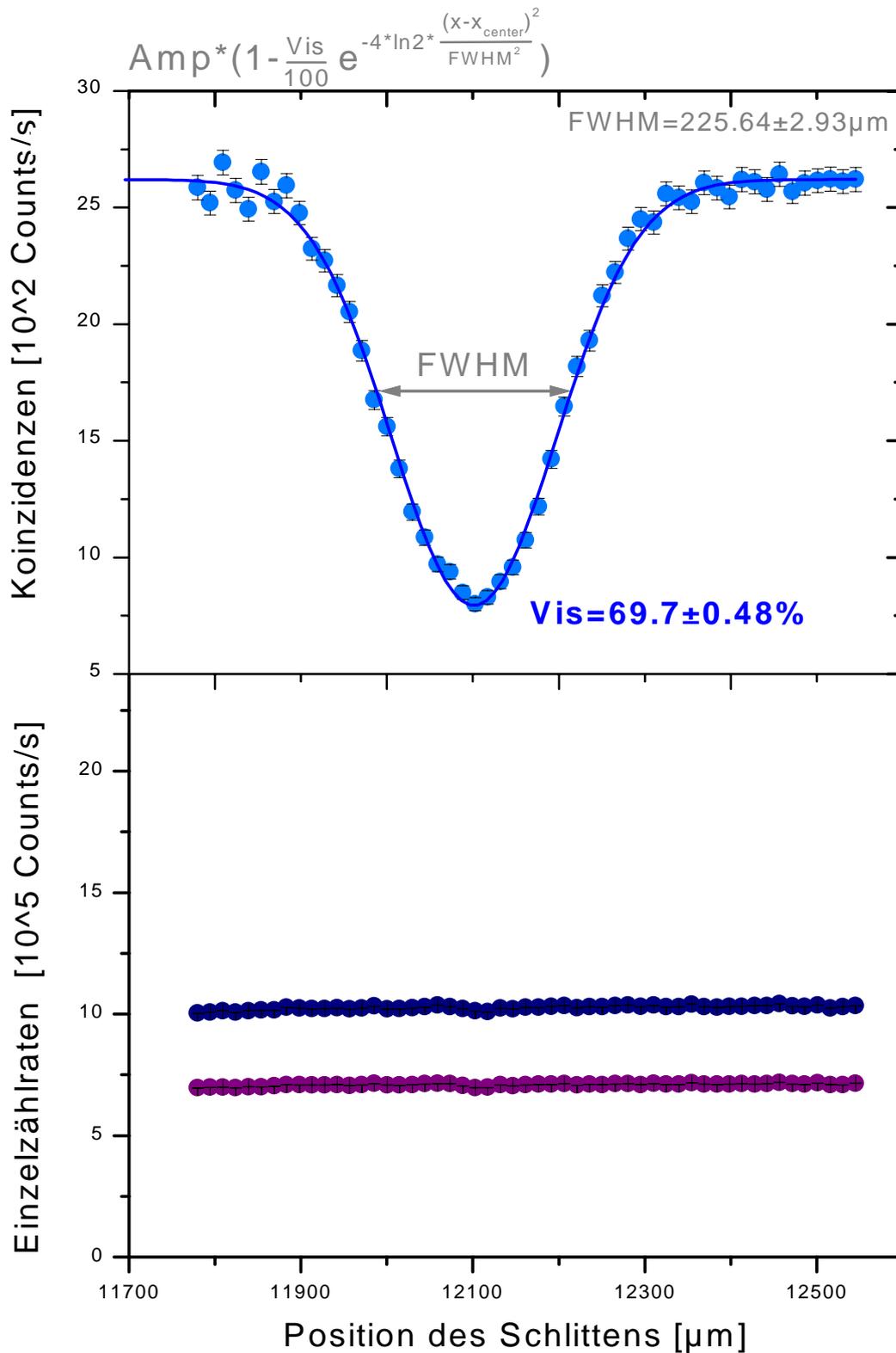


Abbildung 5.20.: Koinzidenzzählrate und Einzelzählraten in Abhängigkeit der Position des Verschiebeschlittens und damit der Weglängendifferenz δl ; wir beobachten den erwarteten Einbruch in der Koinzidenzzählrate für ununterscheidbare Photonen ($\delta l=0$). Die Zählraten für die Einzelphotonen bleiben trotzdem konstant!

6. Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Dissertation wurden zwei verschiedene Experimente durchgeführt, beide zu grundlegenden Fragestellungen.

Die Realisierung von Heisenbergs Gedankenexperiment, das erstmals im Jahr 1929 zur Demonstration der Unschärferelationen angeführt wurde, führt uns zu elementaren Fragen in der Quantenphysik.

Wir konnten auf experimentellem Wege zeigen, daß, bei Messung des Ortes eines Teilchens, gleichzeitig vollständige Informationen über den Impuls desselben Teilchens zu besitzen unmöglich ist (und vice versa).

Unter Beobachtung des Interferenzkontrastes hinter einem Doppelspalt, der als sensitiver Indikator für den Grad von Impuls- bzw. Ortsmessung diente, konnten auch Mittenpositionen genau analysiert werden. Wir stellten fest, daß alle unsere Messungen, auch jene im Bereich zwischen exakter Orts- und exakter Impulsmessung, Englerts Ungleichung erfüllen

$$\text{Kontrast}^2 + \text{Weginformation}^2 \leq 1$$

In manchen Fällen, für besonders gute Messungen, mußte das Gleichheitszeichen herangezogen werden.

Diese Erkenntnisse gelten auch, wenn wir die Entscheidung, welche Messung durchgeführt werden soll, verzögern. Selbst dann, wenn sich Photon1 noch *vor* dem Strahlteiler befindet - der die beiden Wege für Orts- und Impulsmessung zufällig teilt - und das mit dem ersten Photon korrelierte Photon2 schon am Detektor aufgefangen wurde, erhalten wir trotzdem wieder dieselben Ergebnisse. Wir können in Koinzidenz gemessen einen maximalen Kontrast für die Impulsmessung beobachten und keinen Kontrast für die Ortsmessung.

Eine spannende Fortführung des Experiments wäre eine wirklich zufällige, unabhängige Schaltung der Meßentscheidung. Eine derartige Apparatur erfordert einigen Aufwand, wurde jedoch hier am Institut schon entwickelt und in einem Experiment zur Bellungleichung^{1,2} verwendet.

In einem zweiten Experiment konnten wir die dynamische Beugung sowohl für einzelne Photonen als auch für ein korreliertes Photonenpaar beobachten. Zur Realisierung der nötigen perfekt - periodischen Struktur benutzten wir die Brechungsindexmodulationen, erzeugt durch eine akustische Welle in einem Kristall.

Ein besonders interessanter Effekt der dynamischen Beugung ist die Pendellösung: die Intensität für die vorwärts- und die braggebeugte Richtung oszilliert in Abhängigkeit der Länge der periodischen Struktur (oder der Tiefe der Modulationen).

Die Pendellösungslänge gibt uns einen charakteristischen Wert für jene Kristalllänge, nach

¹G. Weihs, Th. Jennewein, Ch. Simon, H. Weinfurter, A. Zeilinger, *Violation of Bell's Inequality under strict Einstein Locality Conditions*, Phys. Rev. Lett. 81, 5039 (1998)

²G. Weihs, Dissertation, Innsbruck (1999)

der der ursprüngliche Zustand für das einfallende Teilchen wieder erreicht ist.

Beobachtet man Korrelation zwischen den Feldern (Interferenzeffekte 1.Ordnung) bzw. die Zählraten der einzelnen Photonen (Einzelzählraten an einem Detektor), so erhält man einen bestimmten Wert für die Pendellösungslänge.

Wir interessierten uns zusätzlich für Interferenzeffekte höherer Ordnung und beobachteten die Korrelationen zwischen den beiden Detektoren. Wir stellten fest, daß die Pendellösungslänge des Zwei-Photonen Zustandes nur halb so lang ist wie jene des einzelnen Photons!

Abbildungsverzeichnis

2.1. Brechungsindizes für ordentliche und außerordentliche Polarisationsrichtung	11
2.2. Die erlaubten Richtungen und zugehörigen Farben der Photonen	12
2.3. Photographie der Type-1 Parametrischen Fluoreszenz	15
3.1. Feynman's Doppelspaltexperiment mit Elektronen	19
4.1. Das Heisenbergmikroskop - ein Gedankenexperiment zur Veranschaulichung der Unbestimmtheitsrelation	20
4.2. Poppers Gedankenexperiment zum Test der Beziehung zwischen Information und Unbestimmtheit	21
4.3. Eine erste Idee zur Realisation von Heisenbergs Mikroskop	30
4.4. Heisenberg Mikroskop: experimenteller Aufbau	33
4.5. Klyshko - Bild für Impulsmessung: Detektor D2 fährt, Detektor D1 ist fix	36
4.6. Klyshko - Bild für Ortsmessung: Detektor D2 fährt, Detektor D1 ist fix	37
4.7. Klyshko - Bild für Impulsmessung: Detektor D1 fährt, Detektor D2 ist fix	38
4.8. Klyshko - Bild für Ortsmessung: Detektor D1 fährt, Detektor D2 ist fix	38
4.9. Einfallswinkel auf den Doppelspalt	39
4.10. Diagramme mit den vier verschiedenen Doppelspalten	40
4.11. Beispiel für das Interferenzbild eines Doppelspaltes	40
4.12. Die Halterung für die Heisenberglinse	41
4.13. Messung der Brennweite der Heisenberglinse	42
4.14. Die Detektoreinheit	44
4.15. Die möglichen 'Geburtsorte' des Photonenpaares	48
4.16. Abbildungsunschärfen verursacht durch die endliche Länge des Kristalls	49
4.17. Photographie des Meßaufbaus; Photo: H. Weinfurter und B. Dopfer, 1997	51
4.18. Heisenbergmikroskop: $f \rightarrow 1.5 f$	56
4.19. Heisenbergmikroskop: $1.73 f \rightarrow 1.87 f$	57
4.20. Heisenbergmikroskop: $1.936 f \rightarrow 1.965 f$	58
4.21. Heisenbergmikroskop: $2 f$	59

4.22. Heisenbergmikroskop: Nullmessung	61
4.23. Nichtlokale Messung: $f \rightarrow 1.5 f$	65
4.24. Nichtlokale Messung: $1.73 f \rightarrow 1.87 f$	66
4.25. Nichtlokale Messung: $1.936 f \rightarrow 1.965 f$	67
4.26. Nichtlokale Messung: $1.976 f \rightarrow 2 f$	68
4.27. Beugungsbilder für jeweils einen Spalt im Bereich $f \rightarrow 1.5 f$	70
4.28. Beugungsbilder für jeweils einen Spalt im Bereich $1.73 f \rightarrow 1.87 f$	71
4.29. Beugungsbilder für jeweils einen Spalt im Bereich $1.936 f \rightarrow 1.965 f$	72
4.30. Beugungsbilder für jeweils einen Spalt im Bereich $1.976 f \rightarrow 2 f$	73
4.31. Nichtlokale Messung: Nullmessung	74
4.32. Die drei Koordinatensysteme: Doppelspalt - Linse - Schirm	76
4.33. Phasenschub Δ für einen Einfallswinkel auf den Doppelspalt, $\theta \neq 0$	79
4.34. Einsteins "Recoiling Slit" Gedankenexperiment	84
4.35. Vorhersagbarkeit des Weges für ein einzelnes Photon	85
4.36. Einhüllende eines Interferenzmusters für Positionen $1.5 f$ und $1.965 f$	86
4.37. Weginformation versus Interferenzkontrast	87
4.38. Wheelers Vorschlag für ein Experiment mit verzögerter Entscheidung	88
4.39. Heisenbergmikroskop mit verzögerter Entscheidung: Experimenteller Aufbau	90
4.40. Die Daten bei verzögerter Entscheidung für die Art der Messung A	93
4.41. Die Daten bei verzögerter Entscheidung der Art der Messung B	94
4.42. Heisenbergmikroskop mit verzögerter Entscheidung: Verschiebung des Heisenberg-Detektors D1	95
5.1. Bragg's Bedingung für konstruktive Interferenz	100
5.2. Ewald Kugel für einen perfekt-periodischen Kristall (\mathbf{k} im Vakuum)	103
5.3. Die erlaubten Wellenvektoren innerhalb eines Brechungsindexgitters; für den symmetrische Lau	104
5.4. Die Energieflüsse durch einen periodischen Kristall	105
5.5. Energieflüsse durch den Kristall, "on Bragg"	106
5.6. Energieflüsse durch den Kristall, "off Bragg" \rightarrow Entkopplung	106
5.7. Abweichung vom Braggwinkel versus Reflektivität	109
5.8. Schematischer Aufbau von Mandel's Experiment	113
5.9. Frequenzverschiebungen durch Reflexion an einer laufenden Schallwelle	114
5.10. Die Frequenzverschiebungen mit einem zusätzlichen AOM	115
5.11. Kontrast des Koinzidenzeinbruchs vs. Weglängendifferenz δl	116

5.12. Mittenfrequenz als Funktion der Filterverkipfung	117
5.13. Dipkontrast in Abhängigkeit der Differenz $\lambda_1 - \lambda_2$	117
5.14. Der experimentelle Aufbau im Labor	118
5.15. Der akusto-optische Modulator	119
5.16. Die Leistung aus dem Verstärker in Abhängigkeit des eingepprägten Stromes .	121
5.17. Reflektivität als Funktion des Einfallswinkels	123
5.18. Normierte Reflektivität in Abhängigkeit der Leistung	123
5.19. AOM-Experiment: Normierte Einzel- und Koinzidenzzählraten der korrelierten Photonen als F	
5.20. AOM-Experiment:Koinzidenzzählrate und Einzelzählraten in Abhängigkeit der Weglängendiffe	
C.1. Die drei Koordinatensysteme mit einer optische Achse, der Nullpunkt der gemeinsamen z-Achse	

A. Unser Kristall: LiIO₃

LiIO₃ ist ein negativ-uniaxialer Kristall. Er ist transparent im Wellenlängenbereich von 0.3 – 6μm.

Der Kristall besitzt keine Inversionssymmetrie und weist damit den für die parametrische Fluoreszenz nötigen Term in der Reihenentwicklung für die dielektrische Suszeptibilität, $\chi_{ijk}^{(2)}$, auf. Aufgrund der hohen Nichtlinearität des Kristalles erhalten wir eine Effizienz des parametrischen Fluoreszenz Prozesses von 10⁻⁴.

Eine Kurve für die Abhängigkeit der Brechungsindizes von der Wellenlänge (sowie andere Eigenschaften des Kristalles) erhält man von der Fa. Cleveland Crystals. Die Brechungsindizes n₀ (ordentlicher) und n_e (außerordentlicher) für die in unserem Fall relevanten Wellenlängen von 351.1 nm und 702 nm sind:

λ	n ₀	n _e
351.1 nm	1.9875	1.8134
702.2 nm	1.8741	1.7293

bei einer Temperatur von 24°C. Die Brechungsindizes sind eine Funktion der Temperatur in der Form

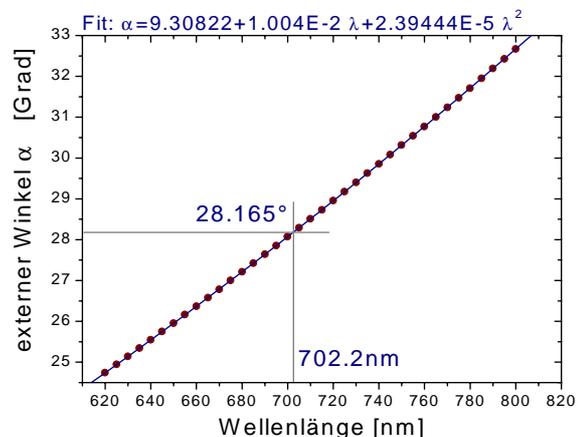
$$\frac{\partial n_0}{\partial T} = -4.56 \cdot 10^{-5} K^{-1}$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial T} = 1.25 \cdot 10^{-5} K^{-1}$$

Der Kristall ist in einem Winkel von 90° relativ zur optischen Achse geschnitten: der für die Nichtlinearität verantwortliche Parameter ist abhängig vom Sinus des Winkels φ zwischen optischer Achse und einfallendem Strahl.

Für den gewählten Schnittwinkel erhält man daher maximale Effizienz (selbstverständlich nur unter der Bedingung, daß der Pumplaser senkrecht auf den Kristall auffällt).

Auf nebenstehender Abbildung sind die Ausfallswinkel der korrelierten Photonen als Funktion der Wellenlänge aufgetragen. Die Daten beruhen auf einer Messung, die am Institut für Experimentalphysik, Univ. Innsbruck, mit unserem LiIO₃ Kristall durchgeführt wurde.



B. Die Rechnungen zur Parametrischen Fluoreszenz

Ganz allgemein kann die durch das einfallende Laserlicht im Kristall erzeugte dielektrische Polarisation \mathbf{P} als Entwicklung in \mathbf{E} (mit χ als der elektrischen Suszeptibilität des nichtlinearen Mediums) in der Form

$$P_l = \chi_{li} \cdot E_i + \chi_{lij}^{(2)} \cdot E_i \cdot E_j + \chi_{lij}^{(3)} \cdot E_i \cdot E_j \cdot E_k + \dots \quad (\text{B.1})$$

beschrieben werden. Der erste Term der Gleichung bewirkt die aus der linearen Optik wohl-bekannteren Phänomene, wie z.B. die Brechung. Der zweite Term ist verantwortlich für nicht-lineare Effekte niedrigster Ordnung, wie auch u.a. für die Parametric Downconversion. Wir werden uns im folgenden nur mehr auf den Teil, der die bilineare Suszeptibilität enthält, beschränken.

Aufgrund seiner hohen Intensität kann das Pumpfeld als klassische elektromagnetische Welle beschrieben werden. Wir nehmen vorerst den Idealfall an das Laserlicht sei eine ebene monochromatische Welle:

$$\mathbf{E}_{pump} = \mathbf{E} \cdot e^{i \cdot (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k}_0) \cdot t)} \quad (\text{B.2})$$

\mathbf{k}_0 ist der Wellenvektor, $\omega(\mathbf{k}_0)$ die Frequenz und $\mathbf{E} = E_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}_s}$ ist das Produkt von Amplitude und Polarisationsvektor (definiert durch den Wellenvektor \mathbf{k} - innerhalb des nichtlinearen Mediums - und den Polarisationsindex $s=1,2$).

Die aus der dielektrischen Verschiebung resultierenden Felder, die die korrelierten Photonen beschreiben, müssen allerdings quantisiert werden. Man erhält Operatoren $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$, die jeweils in einen positiven und negativen Frequenzanteil zerlegt werden können:

$$\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \cdot \sum_{\mathbf{k}, s} -i \cdot \sqrt{\frac{\hbar \cdot \omega(\mathbf{k})}{2 \cdot \epsilon_0}} \cdot \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s}^* \cdot e^{-i \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{B.3})$$

Wir haben den Operator in eine Summe von Moden ebener Wellen entwickelt. L^3 ist das Quantisierungsvolumen, limitiert durch die Länge des Kristalles und den Querschnitt des Lasers. $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s}^*$ ist der Einheitsvektor für die Polarisation und $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t)$ der Erzeugungsoperator für eine Mode des Feldes mit Frequenz $\omega(\mathbf{k})$ - mit Wellenvektor \mathbf{k} und Polarisationsindex $s=1,2$. Für den positiven Frequenzanteil $\hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}, t)$ gilt Analoges, er ist der zu $\hat{\mathbf{E}}^-(\mathbf{r}, t)$ konjugiert komplexe Teil; der Erzeugungsoperator $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger$ wird durch den Vernichtungsoperator $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$ ersetzt. Wir werden im Folgenden - um das hochoszillatorische Verhalten von $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t)$ zu eliminieren - die Operatoren $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^{(\dagger)}(t)$ durch $\hat{A}_{\mathbf{k}s}^{(\dagger)}(t) = \hat{a}_{\mathbf{k}s}^{(\dagger)}(t) \cdot e^{i \cdot \omega(\mathbf{k}) \cdot t}$ ersetzen.

Die Kopplung des Pumpfeldes an die korrelierten Photonenpaare innerhalb der Wechselwirkungsregion kann mithilfe eines Hamilton Operators $\hat{\mathbf{H}}$ beschrieben werden. Er gibt die

Gesamtenergie des Systems einschließlich der Wechselwirkungsenergie wieder. Aufgrund der geringen Effizienz des Prozesses, $\langle \hat{n}_{signal}(t) \rangle, \langle \hat{n}_{idler}(t) \rangle \ll |E_0|^2$, kann er in der gerechtfertigten Näherung, daß die Wechselwirkung keine Rückwirkungen auf das Pumpfeld hat, als Summe zweier Operatoren, $\hat{\mathbf{H}}_0$ und $\hat{\mathbf{H}}_I$, beschrieben werden.

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}}_0 + \hat{\mathbf{H}}_I \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}} = & \sum_{\mathbf{k}_0, s} \hbar \cdot \omega(\mathbf{k}_0) \cdot \hat{n}_{\mathbf{k}_0, s} + \\ & + \left(\int_V d^3x \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}', s'} \sum_{\mathbf{k}'', s''} \tilde{\chi}_{lij}(\mathbf{r}; \omega(\mathbf{k}_0), \omega(\mathbf{k}'), \omega(\mathbf{k}'')) \cdot \hat{A}_{\mathbf{k}', s'}^\dagger(t) \cdot \hat{A}_{\mathbf{k}'', s''}^\dagger(t) \cdot \right. \\ & \left. \cdot E_l \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'s'}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}''s''}^* \cdot e^{i \cdot [(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \cdot \mathbf{r} - (\omega(\mathbf{k}_0) - \omega(\mathbf{k}') - \omega(\mathbf{k}'')) \cdot t]} + H.c. \right) \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

Hier ist $\tilde{\chi}_{lij} = \sqrt{(\hbar^2 \cdot \omega(\mathbf{k}') \cdot \omega(\mathbf{k}'')) / (4 \cdot \epsilon_0^2)} \cdot \chi_{lij}$ die effektive Suszeptibilität und der Operator $\hat{n}_{\mathbf{k}_0, s} = (\hat{a}_{\mathbf{k}_0, s}^\dagger \cdot \hat{a}_{\mathbf{k}_0, s} + \frac{1}{2})$ ist der Teilchenzahloperator.

$\hat{\mathbf{H}}_0$ beschreibt die Energie jener Photonen des Laserfeldes, die den Kristall ohne Effekt passieren; $\hat{\mathbf{H}}_I$ ist der Wechselwirkungsoperator. Er unterteilt sich in ein Integral, das die spontane Aufspaltung des Pumpphotons in Signal und Idler Photonen beschreibt, und einen konjugiert komplexen Part, der verantwortlich ist für den Prozeß der Upconversion¹. Dieser Fall interessiert hier jedoch nicht und wird auch nicht weiter berücksichtigt werden.

Da wir uns auf Type-1 Downconversion beschränken, kann die Summierung über die Polarisationsvektoren der drei Felder weggelassen werden.

Die Polarisation des Pumpfeldes ist fix in außerordentlicher Richtung relativ zur optischen Achse des Kristalles orientiert, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}_0 s} = \mathbf{e}_l(\mathbf{k}_0)$ (e steht für außerordentliche Polarisation); der Betrag des Pumpwellenvektors innerhalb des Kristalles ist $k_0 = \frac{\omega_0}{c} \cdot n_e(\omega_0)$ mit dem außerordentlichen Brechungsindex $n_e(\omega_0)$. Analoges gilt für die Photonenpaare, allerdings sind diese in ordentlicher Richtung polarisiert $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}' s'} = \mathbf{o}'(\mathbf{k}')$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'' s''} = \mathbf{o}''(\mathbf{k}'')$ (o steht für ordentliche Polarisation); die Beträge der Wellenvektoren werden durch den ordentlichen Brechungsindex bestimmt, $k' = \frac{\omega'}{c} \cdot n_o(\omega')$, $k'' = \frac{\omega''}{c} \cdot n_o(\omega'')$.

Treffen wir die Annahme eines räumlich homogenen Kristalls, zentriert um \mathbf{r}_0 und mit Dimensionen $L^3 = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3$, kann das Volumsintegral leicht durchgeführt werden. Wir erhalten für den Hamiltonoperator

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}} = & \sum_{\mathbf{k}_0} \hbar \cdot \omega(\mathbf{k}_0) \cdot \hat{n}_{\mathbf{k}_0, s} + \\ & + \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{k}''} \tilde{\chi}_{lij}(\mathbf{r}; \omega(\mathbf{k}_0), \omega(\mathbf{k}'), \omega(\mathbf{k}'')) \cdot \hat{A}_{\mathbf{k}', s'}^\dagger(t) \cdot \hat{A}_{\mathbf{k}'', s''}^\dagger(t) \cdot E_l \cdot e^{i \cdot ((\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \cdot \mathbf{r}_0)} \quad (\text{B.6}) \\ & \cdot e^{-i(\omega(\mathbf{k}_0) - \omega(\mathbf{k}') - \omega(\mathbf{k}'')) \cdot t} \cdot \mathbf{e}_l(\mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{o}'(\mathbf{k}') \cdot \mathbf{o}''(\mathbf{k}'') \prod_{n=1}^3 \left(\frac{\sin[\frac{1}{2} \cdot (k_0 - k' - k'')_n \cdot l_n]}{\frac{1}{2} \cdot (k_0 - k' - k'')_n \cdot l_n} \right) \end{aligned}$$

Man erkennt sofort aus den Eigenschaften der sinc-Funktion, daß die Wellenvektoren der drei involvierten Felder nur ganz bestimmte Werte annehmen dürfen: aus der Bedingung für maximale Intensität, d.h. $\text{sinc}[\frac{1}{2} \cdot (k_0 - k' - k'')_n \cdot l_n] = 1$, erhält man eine Bedingung zur Phasenanpassung, $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}' + \mathbf{k}''$.

¹aus zwei niederfrequenten Photonen entsteht ein Photon mit einer Frequenz gleich der Summe der beiden ersten Frequenzen

Um die weitere zeitliche Evolution des Feldes betrachten zu können, integrieren wir den Hamilton Operator über die Wechselwirkungszeit². Der Anfangszustand des Photonenpaares zur Zeit $t=0$ sei $|\Psi(0)\rangle = |vac\rangle_s |vac\rangle_i$. Zu einer späteren Zeit erhalten wir für den Zustand im Heisenberg Bild

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \hat{\mathbf{H}}_I(t')} |\Psi(0)\rangle \\ &= |vac\rangle_s |vac\rangle_i - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \hat{\mathbf{H}}_I(t') |vac\rangle_s |vac\rangle_i + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Die Wechselwirkungszeit, über die integriert wird, ist in allen praktischen Fällen sehr viel kleiner als die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Downconversion Prozessen. Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion kann daher nach dem zweiten Glied abgebrochen werden (Störungstheorie erster Ordnung).

Nach Integration über t fassen wir zur besseren Veranschaulichung des Zustandes die Exponentialfunktionen, die Suszeptibilität und die Polarisationsvektoren zu einer Funktion

$$\Phi(\omega(k_0), \omega(k'), \omega(k'')) = -\frac{i}{\hbar} \cdot \tilde{\chi}_{lij} \cdot e^{i[(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \cdot \mathbf{r}_0 - (\omega_0 - \omega' - \omega'') \cdot \frac{t}{2}]} \cdot e_l(\mathbf{k}_0) \cdot o'(\mathbf{k}') \cdot o''(\mathbf{k}'')$$

zusammen und erhalten - nach Anwendung des Erzeugungsoperators auf den Vakuumzustand, $\hat{a}^\dagger |vac\rangle = |\mathbf{k}, s\rangle$ - für den 2-Photon Zustand

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= |vac\rangle_s |vac\rangle_i + \int_{\mathbf{k}'} \int_{\mathbf{k}''} d\mathbf{k}' d\mathbf{k}'' \Phi(\omega(\mathbf{k}_0), \omega(\mathbf{k}'), \omega(\mathbf{k}'')) \cdot \text{sinc}\left[\frac{1}{2} \cdot (\omega_0 - \omega' - \omega'') \cdot t\right] \\ &\quad \cdot \prod_{n=1}^3 \text{sinc}\left[\frac{1}{2} \cdot (k_0 - k' - k'')_n \cdot l_n\right] \cdot E_l \cdot |\mathbf{k}'\rangle_s |\mathbf{k}''\rangle_i \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Analog zu den Wellenvektoren ergibt sich auch für die Frequenzen eine einschränkende Bedingung der erlaubten Werte, $\omega(\mathbf{k}_0) = \omega(\mathbf{k}') + \omega(\mathbf{k}'')$. Für maximale Intensität müssen sich die Frequenzen von Signal und Idler Photon aufaddieren zur Frequenz des Pumpphotons, was nichts anderes als den Energieerhaltungssatz widerspiegelt.

Will man zusätzlich die endliche spektrale Breite des Pumpasers mitberücksichtigen, also $\mathbf{E}_{pump} = \int_{\omega_0} \mathbf{E}(\omega_0) \cdot e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k}_0) \cdot t)} d\omega_0$, so kann die konstante Pumpamplitude in Gleichung (B.8) direkt durch den neuen frequenzabhängigen Ausdruck ersetzt werden

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &\propto \int_{\omega_0} d\omega_0 \int_{\mathbf{k}'} \int_{\mathbf{k}''} d\mathbf{k}' d\mathbf{k}'' \Phi(\omega(\mathbf{k}_0), \omega(\mathbf{k}'), \omega(\mathbf{k}'')) \cdot \text{sinc}\left[\frac{1}{2} \cdot (\omega_0 - \omega' - \omega'') \cdot t\right] \cdot \\ &\quad \cdot \prod_{n=1}^3 \text{sinc}\left[\frac{1}{2} \cdot (k_0 - k' - k'')_n \cdot l_n\right] \cdot E(\omega_0) \cdot |\mathbf{k}'\rangle_s |\mathbf{k}''\rangle_i \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Wir erhalten auf einfache Weise einen allgemeinen Ausdruck zur Beschreibung des Zustandes eines korrelierten downconversion Photonenpaares.

²L. Mandel, E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Chap. 22.4, Cambridge Univ. Press 1995

C. Berechnungen zum Heisenbergmikroskop

C.1. Berechnung der relevanten Distanzen und Phasen

Zur Berechnung des Integrals und damit der Intensitätsverteilung approximieren wir den Phasenterm $-ik(R + R')$ in quadratischer Näherung, indem wir R (R') um R_0 (R'_0) bzw. S (S') entwickeln und die Reihe nach dem zweiten (quadratischem) Glied abbrechen (\rightarrow Fresnel-Kirchhoff'sches Beugungsintegral).

Dies ist gerechtfertigt, wenn die Terme höherer Ordnung gegen Null gehen, wenn wir z.B. Linsenaberrationen außeracht lassen können.

Unter simpler Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes können wir für R , und analog für R' (siehe Abb. 4.32) schreiben

$$R = \sqrt{(\tilde{x} - x)^2 + S^2}$$

$$R = S \sqrt{1 - \frac{(\tilde{x} - x)^2}{S^2}} \cong S \left(1 - \frac{(\tilde{x} - x)^2}{2S^2} + \dots\right)$$

und erhalten daraus für die Summe von $R + R'$

$$R + R' = S + S' + \frac{(\tilde{x} - x)^2}{2S} + \frac{(x' - \tilde{x})^2}{2S'}$$

Mithilfe von $S = \sqrt{R_0^2 - x^2} \cong R_0 \left(1 - \frac{x^2}{2R_0^2}\right)$ (wieder brechen wir die Reihe nach dem quadratischen Glied ab) - analoges gilt natürlich auch für S' - ergibt die Summe von R und R' schließlich

$$R + R' \cong R_0 + R'_0 + \frac{\tilde{x}^2}{2} \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{S'}\right) - \tilde{x} \left(\frac{x}{S} + \frac{x'}{S'}\right) \quad (\text{C.1})$$

Wir werden noch einen etwas anderen, äquivalenten Ausdruck verwenden, der sich berechnet durch Abziehen einer Distanz X' von S' zurück in die Brennebene ($X' = S' - f$) der Heisenberg-Linse, um dann von hier aus durch Addieren der Distanz $\overline{FP'}$ zum Meßpunkt zu kommen (siehe dazu auch Abb. 4.32)

$$R + R' = S + S' - X' + \overline{FP'}$$

$$\overline{FP'} = \sqrt{x'^2 + X'^2} \cong X' \left(1 + \frac{x'^2}{2X'^2}\right)$$

$$R + R' \cong S + S' + \frac{x'^2}{2(S' - f)} + \frac{\tilde{x}^2}{2} \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{S'}\right) - \tilde{x} \left(\frac{x}{S} + \frac{x'}{S'}\right) \quad (\text{C.2})$$

Mithilfe dieser beiden Gleichungen kann die Intensitätsverteilung durch Ausführen eines doppelten Integrals für beliebige Positionen des Detektors D1 hinter der Heisenberglinse berechnet werden.

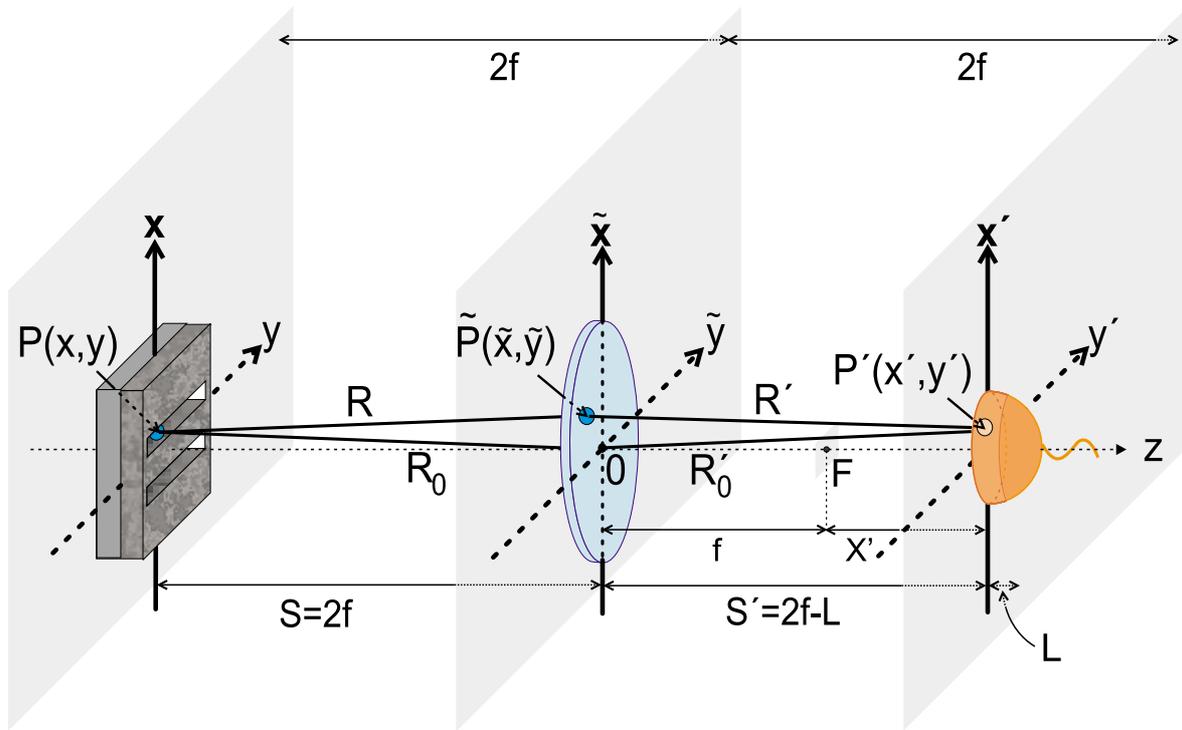


Abbildung C.1.: Die drei Koordinatensysteme mit einer optische Achse, der Nullpunkt der gemeinsamen z-Achse liegt symmetrisch im mittleren System. P , \tilde{P} und P' sind typische Punkte in den jeweiligen Ebenen für den Doppelspalt, die Linse und den Schirm

C.2. Die möglichen Winkel im Experiment

Übernimmt einer der beiden Detektoren die Rolle der Quelle, so haben die resultierenden möglichen Winkel einen direkten Einfluß auf die Meßresultate.

Die Winkel sind nur limitiert durch die Größe des Detektors und die Brennweite der Linse. Dieser Zusammenhang läßt sich leicht mithilfe der Matrizenrechnung für eine dünne Linse herleiten:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_{out} \\ \alpha_{out} \end{pmatrix}}_{\text{Beschreibung des ausfallenden Strahles: } r=\text{Abstand von der opt. Achse, } \alpha=\text{Winkel in Bezug auf die opt. Achse}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Matrix zur Beschreibung der Wirkung einer dünnen Linse}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Matrix für das Zurücklegen einer Distanz D, hier im speziellen Fall ist } D=f} \underbrace{\begin{pmatrix} r_{in} \\ \alpha_{in} \end{pmatrix}}_{\text{analog zur Beschreibung des ausfallenden Strahles für den einfallenden Strahl}} = \begin{pmatrix} 1 & f \\ -\frac{1}{f} & -\frac{f}{f} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{in} \\ \alpha_{in} \end{pmatrix}.$$

Beschreibung des ausfallenden Strahles: r =Abstand von der opt. Achse, α =Winkel in Bezug auf die opt. Achse

Matrix zur Beschreibung der Wirkung einer dünnen Linse

Matrix für das Zurücklegen einer Distanz D , hier im speziellen Fall ist $D=f$

analog zur Beschreibung des ausfallenden Strahles für den einfallenden Strahl

Daraus lassen sich die möglichen Ausfallswinkel leicht berechnen. Für den Fall, daß die "Quelle" (also jener Detektor, der während der Messung fix bleibt) in der Brennebene der

jeweiligen Linse steht, erhält man für den Ausfallswinkel folgenden Ausdruck

$$\Delta\alpha = -2 \frac{r_{(in)}}{f} \quad (\text{C.3})$$

Bei Fixieren des Doppelspalt-Detektors erhalten wir aufgrund der sehr klein gewählten Detektorgröße eine Winkelbreite von nur $\Delta\alpha = 0.2836$ mrad. Ist der Heisenberg-Detektor fix und in der Brennebene der Linse erhalten wir einen Wert von $\Delta\alpha = 0.093$ mrad.

D. Rechnungen zum AOM-Experiment

D.1. Berechnung der Reflektivität des AOM mittels ebener Wellen

Wir beschreiben die einfallenden Teilchen vorerst mithilfe von ebenen Wellen, um die Wirkungsweise des akusto-optischen Modulators verstehen zu lernen.

Beginnend mit Maxwellsgleichung für die elektrischen und magnetischen Felder in einem Medium (Ströme \mathbf{j} seien Null)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mu \mathbf{D}) \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}}{\partial t^2}$$

und vorerst einem Ansatz ebener Wellen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + c.c.$$

erhalten wir durch Einsetzen und Ableiten nach Ort und Zeit

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \mathbf{E}(\mathbf{r})}{dr^2} - 2 i k \frac{d\mathbf{E}(\mathbf{r})}{dr} - k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + \frac{\mu \varepsilon}{2} \omega^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + c.c. = \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}}{\partial t^2}$$

Wenn wir annehmen, daß die räumliche Variation der Amplitude sehr viel kleiner ist als die restlichen Terme, $\frac{d^2 \mathbf{E}(\mathbf{r})}{dr^2} \ll k \frac{d\mathbf{E}(\mathbf{r})}{dr}$ und mit der Definition des Wellenvektors im Medium, $k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$ vereinfacht sich obiger Ausdruck zu

$$- i k \frac{d\mathbf{E}(\mathbf{r})}{dr} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + c.c. = \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (D.1)$$

Wir betrachten nun die rechte Seite obiger Gleichung. Für den linearen photoelastischen Effekt erhalten wir eine Änderung des Brechungsindex bzw. der Dielektrizitätskonstante proportional zum photoelastischen Tensor \wp mit

$$\Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_{kl} = \Delta \left(-\frac{\varepsilon_{kl}}{\varepsilon_k \varepsilon_l} \right) = \wp_{klmn} \left(\frac{S_{mn}}{2} e^{i(\Omega_s t - \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{r})} + c.c. \right)$$

Die rechte Seite beinhaltet die Ursache der Störung, die akustische Welle. S ist die Amplitude, Ω_s die Frequenz und \mathbf{K}_s der Wellenvektor.

Mithilfe des Zusammenhangs zwischen Polarisierbarkeit und elektrischen Feldern

$$P_k = \varepsilon_{kl} E_l - \varepsilon E_k$$

erhalten wir für die Änderung der Polarisation induziert durch die Schallwelle

$$\Delta P_k = \Delta \varepsilon_{kl} E_l = -\varepsilon_k \varepsilon_l \varepsilon \wp_{klmn} \left(\frac{S_{mn}}{2} e^{i(\Omega_s t - \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{r})} + c.c. \right)$$

Wir betrachten jetzt nur noch zwei Felder innerhalb des Kristalles (Zweistrahlnäherung) und benennen sie mit den Indizes "0" und "G" ($k = 0, l = G$).

Durch Ableiten der resultierenden Gleichungen vorerst nur für das Feld \mathbf{E}_0 werden wir eine gekoppelte Gleichung erhalten, analoges kann man dann auch direkt für \mathbf{E}_G anschreiben.

Mit also erst einmal $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ und durch einsetzen von $\Delta \mathbf{P}_0$ auf der rechten Seite von Gl. (D.1) erhält man dann Exponentialfunktionen in Abhängigkeit von \mathbf{E}_0 , \mathbf{E}_G und dem Term der akustischen Welle.

$$e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})} \propto e^{i(\omega_G t - \mathbf{k}_G \cdot \mathbf{r})} e^{i(\Omega_s t - \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{r})}$$

Soll die Polarisationsänderung $\Delta \mathbf{P}$ in Phase mit dem einfallenden Feld oszillieren, um eine optimale Verstärkung zu garantieren, muß für die Frequenzen und Wellenvektoren gelten

$$\omega_0 = \omega_G \pm \Omega_s \quad (\text{D.2})$$

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_G \pm \mathbf{K}_s \quad (\text{D.3})$$

andernfalls mitteln sich die Terme von $\Delta \mathbf{P}$ zu Null.

Diese Gleichungen bedingen Energieerhaltung und Impulserhaltung, wobei letzteres der Erfüllung der Braggbedingung entspricht.

Wir setzen nun in Gl. (D.1) für $\Delta \mathbf{P}$ ein, dividieren durch " $-ik$ ", berücksichtigen die Energieerhaltung und setzen für $\varepsilon_0 \approx \varepsilon_G \equiv n^2$. Wenn wir das plus-Zeichen in Gl. (D.2) anwenden, erhalten wir schließlich das gekoppelte Gleichungssystem

$$\frac{d\mathbf{E}_0(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}} = i \frac{\pi n^3}{2 \lambda_0} \wp S \mathbf{E}_G(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_G \mp \mathbf{K}_s) \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{d\mathbf{E}_G(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}} = i \frac{\pi n^3}{2 \lambda_G} \wp S \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_G \mp \mathbf{K}_s) \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{D.5})$$

wobei die Gleichung für \mathbf{E}_G analog berechnet wurde wie jene für \mathbf{E}_0 .

Danksagung

An erster Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. A. Zeilinger für die Möglichkeit, in seiner Gruppe eine Dissertation auf einem so spannenden Gebiet wie der Quantenoptik zu schreiben, herzlich danken. Seine interessanten und lehrreichen Anregungen sowie sein stetes Interesse an meiner Arbeit trugen wesentlich zum Fortgang und Erfolg bei.

Im Speziellen möchte ich aber hier für die Möglichkeit danken, eine der außergewöhnlichsten Persönlichkeiten dieses Jahrhunderts kennenzulernen, Seine Heiligkeit, den XIV. Dalai Lama. Für mich war dies schon seit Jahren ein unerreichbar und unrealistisch scheinender Traum gewesen. Der Besuch Seiner Heiligkeit an unserem Institut mit den nachfolgenden Diskussionsrunden war deswegen ein besonders beeindruckendes Ereignis in meinem Leben, das ich sicher nicht mehr vergessen werde.

Zu großem Dank verpflichtet bin ich Herrn Doz. Dr. H. Weinfurter sowohl für seine Freundschaft als auch für seine wertvollen Ratschläge, die maßgeblich zum Erfolg dieser Arbeit beigetragen haben. Seine Hilfe im Labor und bei theoretischen Fragen war unerlässlich und half mir über so manche Schwierigkeiten hinweg.

Auch der ständige Besuch verschiedener Wissenschaftler am Institut war sehr fruchtbar.

Außerdem danken möchte ich allen, die mir dabei geholfen haben, technische und elektronische Probleme zu lösen.

Für das angenehme und freundschaftliche Arbeitsklima und den Spaß neben der Arbeit danke ich meinen Kolleginnen und Kollegen hier am Institut recht herzlich. Insbesondere die kleinen Pausen zwischendurch mit Annette Lacroix, Alois Mair, Markus Michler oder Klaus Mattle halfen, danach wieder mit neuer Energie weiterzuarbeiten.

Surasak Chiangga danke ich für die lustige, nette Atmosphäre, die er durch seinen einzigartigen Charakter in unserem kleinen Büro schuf. Es machte mir großen Spaß seinen Geschichten über seine Heimat Thailand zuzuhören.

Ganz besonders danken möchte ich meinen Eltern Gertrud und Helmut Dopfer. Sie ließen mir nach der Matura jede Möglichkeit offen, bestärkten mich schließlich in meinem Wunsch zu studieren und unterstützten mich während des ganzen Studiums in jeder Lage sowohl emotional als auch finanziell (eine nicht ganz unwichtige Voraussetzung).

Ich hatte und habe das Glück in einer großen Familie (mit meinen vier Schwestern Monika Hagspiel, Karin Schrick, Renate Baldauf und Sandra Dopfer) gut aufgehoben zu sein, was mir half trotz immer wieder auftauchender Schwierigkeiten weiterzumachen und so viele Situationen erfolgreich zu meistern.

Meine Schwester Sandra möchte ich noch speziell erwähnen. Durch sie hatte ich die Gelegenheit neben der Physik meinen (sonst vielleicht immer noch begrenzten) Horizont durch die vielen Reisen in zahlreiche Länder auf der ganzen Welt kräftig zu erweitern. Diese Erfahrungen wirkten sich äußerst positiv auf meine Persönlichkeitsentwicklung und auch auf

meine Bewerbungschancen auf dem Arbeitsmarkt aus.

Zu meiner Familie gehören aber auch meine Nichten und Neffen, Bianca, Martina, Markus, Raffaella, Manuel und Nikolas, die ich hier ebenfalls erwähnen möchte, und Nikolai, für den ich die Patenschaft übernehmen durfte.

Ohne meine Familie im Hintergrund wäre einiges sehr viel schwerer gewesen und sehr vieles unmöglich.

Meinem Freund Gregor Weihs, der meine Launen ertragen muß, sich meine (manchmal unsinnigen) Sorgen geduldig anhört und mich immer wieder liebevoll aufmuntert und zum Lachen bringt, möchte ich besonders danken. Unsere Beziehung gibt mir das Glück und die Sicherheit, die ich für Erfolg und Zufriedenheit brauche.

An dieser Stelle möchte ich auch seiner Mutter, Hannelore Weihs, recht herzlich dafür danken, daß ich in ihrem Haus immer willkommen war.

Janette Aschenwald danke ich für die wunderbare Studien- und Diplomarbeitszeit, die durch Spaß und gemeinsames Lachen viel zu schnell verging. Außerdem danken möchte ich für die langjährige, stetige Freundschaft; sie hatte für meine Sorgen immer ein offenes Ohr.

Dafür danke ich auch allen meinen Freunden. Sie mögen zwar nicht namentlich erwähnt sein, sollten aber trotzdem wissen, daß sie gemeint sind.

Für die finanzielle Unterstützung durch den Fond zur Förderung wissenschaftlicher Forschung, Projekt S6502, wird gebührend gedankt.

Lebenslauf

02. Juli 1969 geboren in Lustenau, Vorarlberg
Eltern: Gertrud und Helmut Dopfer
- 1975 - 1979 Volksschule Rieden-Vorkloster in Bregenz
1979 - 1987 Neusprachliches BRG (Gallusstift)
27. 06. 1987 Ablegung der Matura
- Okt. 1987 Immatrikulation an der Universität Innsbruck
Inskription des Studiums der Physik, Studienzweig Physik Diplom
29. Mai 1990 1. Diplomprüfung
02. Juli 1993 2. Diplomprüfung
17. Juli 1993 Sponsion
- Oktober 1993 Inskription des Doktoratsstudiums der Physik
21. Dezember 1998 Doktoratsprüfung
23. Jänner 1999 Promotion